Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 15. Dezember 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

29. S. a) Z sei standard-normalverteilt. Bestimmen Sie $c > 0$ so, dass für das Intervall $I = [-c, c]$ gilt: $\mathbf{P}(Z \in I) = 0.99$. (Hinweis: Der R-Befehl `qnorm(p)` liefert $\Phi^{-1}(p)$. Mehr Informationen darüber bekommen Sie, wenn Sie `?qnorm` in die R-Konsole eingeben.)

b) N_1 sei $\mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ verteilt, N_2 sei $\mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$ -verteilt, und N_1, N_2 seien unabhängig. Wie ist $N_1 + N_2$ verteilt?
Hinweis: Betrachten Sie mit $Z_1 := N_1/\sigma_1$, $Z_2 := N_2/\sigma_2$ die Umformung $N_1 + N_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} Z_2\right)$ und erinnern Sie sich an VL 7b Folie 11.

c) Für $i = 1, 2, \ldots, 10$ sei X_i eine $\mathrm{N}(0, i)$-verteilte Zufallsvariable, und die X_i seien unabhängig. Finden Sie ein um 0 symmetrisches Intervall, in welches die Zufallsvariable $X_1 + \ldots + X_{10}$ mit Wahrscheinlichkeit (i) 0.99 (ii) 0.999 fällt.

30. X_1 und X_2 seien unabhängig und uniform auf $[-0.5, 0.5]$ verteilt.
a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte, den Erwartungswert und die Standardabweichung von $X_1 + X_2$. Fertigen Sie auch eine Skizze an, die all dieses illustriert.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt $X_1 + X_2$ außerhalb seiner (i) Ein-Sigma (ii) Zwei-Sigma Grenzen (um seinen Erwartungswert)?

31. $Y_1, Y_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt, mit $\mathbf{P}(Y_i = 1) = \frac{2}{3}$ und $\mathbf{P}(Y_i = 2) = \frac{1}{3}$. Wir setzen $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ und $\mu_n := \mathbf{E}[S_n]$. Finden Sie (jeweils für $n = 25$)
a) ein um μ_n zentriertes Intervall $[\ell, r]$, sodass
(i) $\mathbf{P}(S_n \in [\ell, r]) \approx 0.95$
(ii) $\mathbf{P}(S_n \in [\ell, r]) \approx 0.99$.
b) ein um S_n zentriertes Intervall $I_n := [S_n - \delta, S_n + \delta]$, sodass
(i) $\mathbf{P}(\mu_n \in I_n) \approx 0.95$,
(ii) $\mathbf{P}(\mu_n \in I_n) \approx 0.99$.
Verwenden Sie dabei jeweils die Normalapproximation. Auch der Hinweis in Aufgabe 29 ist nützlich. (Übrigens: Das Intervall I_n in Teil b) "erbt" die Zufälligkeit von S_n, man spricht deshalb von I_n auch von einem *zufälligen Intervall.*)

32. S. Wir betrachten die Situation von Aufgabe 17. Es sei μ der in 17a) berechnete Populationsmittelwert, σ^2 die in 17a) berechnete Populationsvarianz, und $X_1 := W_1, \ldots, X_{10} := W_{10}$ die zufälligen Werte, die bei einem 10-maligen Ziehen ohne Zurücklegen entstehen (vgl. 17d) (ii)).
a) Warum sind die X_i nicht unabhängig?
b) Wir setzen $M := \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$. Es sei Ihnen verraten, dass trotz der fehlendn Unabhängigkeit der W_i auch hier der Zentrale Grenzwertsatz greift, und zwar in einer (auf der vorletzten Folie von VL 8a) angedeuteten allgemeineren Version. (Der intuitive Grund ist, dass 10 schon "ein bisschen groß" und auch ordentlich weg von 100 ist, sodass sich die Abhängigkeiten nur schwach bemerkbar machen.) Deshalb dürfen Sie im Rest der Aufgabe die Normalapproximation verwenden. Sie sollten dabei sehr wohl mit der Standardabweichung von M arbeiten, die wir in Aufgabe 17 berechnet haben.
(i) Finden Sie ein um μ zentriertes Intervall $[\ell, r]$, sodass $\mathbf{P}(M \in [\ell, r]) \approx 0.95$.
(ii) Finden Sie ein um M zentriertes Intervall $I = [M - \delta, M + \delta]$, sodass $\mathbf{P}(\mu \in I) \approx 0.95$.