Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 8. Dezember 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

25. S. a) Die Zufallsvariable X_1 habe den Wertebereich $S_1 := \{b, c\}$ und die Zufallsvariable X_2 habe den Wertebereich $S_2 := \{1, 2\}$. Die Verteilung des zufälligen Paares (X_1, X_2) ist gegeben durch die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$. Wir betrachten dafür zwei Beispiele i), ii).
In welchem der Beispiele sind X_1 und X_2 unabhängig?

i)

	1	2
b	0.05	0.15
c	0.2	0.6

ii)

	1	2
b	0.1	0.1
c	0.2	0.6

b) Es seien X_1 und X_2 diskrete Zufallsvariable, deren gemeinsame Verteilungsgewichte von der Form $(*)$ $\rho(a_1, a_2) = \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)$ mit nichtnegativen $\mu_1(a_1)$, $\mu_2(a_2)$ sind. Zeigen Sie, dass dann die Produktformel $\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\rho_2(a_2)$, $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2$, gilt, mit $\rho_1(a_1) := \sum_{a_2'} \rho(a_1, a_2')$ und $\rho_2(a_2) := \sum_{a_1'} \rho(a_1', a_2)$. Prüfen Sie dazu erst nach, dass $\rho_1(a_1) = \mu_1(a_1)k_2$ mit $k_2 := \sum_{a_2'} \mu_2(a_2')$ gilt, sowie $\rho_2(a_2) = \mu_2(a_2)k_1$ mit $k_1 := \sum_{a_1'} \mu_1(a_1')$. Warum folgt aus $(*)$ die Gleichheit $k_1 k_2 = 1$?

c) Die Zufallsvariable X_1 habe den Wertebereich $S_1 := \{b, c, d\}$ und die Zufallsvariable X_2 habe den Wertebereich $S_2 := \{1, 2, 3\}$. Wir betrachten wieder zwei Beispiele für die gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, jeweils mit $\gamma := \frac{1}{132}$.

i)

	1	2	3
b	6γ	7γ	9γ
c	12γ	14γ	18γ
d	18γ	21γ	27γ

ii)

	1	2	3
b	6γ	7γ	9γ
c	12γ	15γ	18γ
d	18γ	20γ	27γ

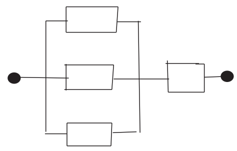
In welchem der beiden Beispiele i), ii) sind X_1 und X_2 unabhängig, und in welchem nicht?

26. a) Für die Zufallsvariable X_1 mit Wertebereich S_1 existiere ein $c \in S_1$ mit $\mathbf{P}(X_1 = c) = 1.$[1]. Zeigen Sie, dass dann für jede Zufallsvariable X_2 gilt: X_1 und X_2 sind unabhängig. (Diskutieren Sie dazu erst den Fall diskreter Wertebereiche und dann, wenn Sie Lust haben, auch noch den allgemeinen Fall.)

b) Für die Weiterverarbeitung $h(X)$ der Zufallsvariablen X existiere ein Ereignis $\{h(X) \in B\}$ mit $0 < \mathbf{P}(h(X) \in B) < 1$. Zeigen Sie, dass dann X und $h(X)$ nicht unabhängig sind.

c) Z sei standard-normalverteilt. Sind Z und Z^2 (i) unabhängig ? (ii) unkorreliert?

27. S. Für $i = 1, 2, 3, 4$ sei X_i sei Exp(i)-verteilt, und die X_i seien unabhängig. Es sei $Y := \max(X_1, X_2, X_3)$ und $T := \min(Y, X_4)$.
a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion i) von Y ii) von T.
b) Weisen Sie den Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4, Y, T eine Bedeutung in der skizzierten Reihen-und Parallelschaltung zu.



28. Der zufällige Punkt P sei standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$. Die gewöhnlichen Koordinaten von P seien (X_1, X_2), und $R := \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ sei sein Abstand vom Ursprung.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von R^2. (Hinweis: Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass P in eine bestimmte, um den Ursprung zentrierte Kreisfläche K fällt, ist es günstig, K mittels Polarkoordinaten in ein Rechteck in der (r, θ)-Ebene zu transformieren, vgl. Vorlesung 6b, Folie 13.)

b) Q sei ein weiterer standard-normalverteilter Punkt auf $\mathbb{R}^2$, und P, Q seien unabhängig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der beiden Punkte P, Q einen Abstand vom Ursprung hat, der kleiner als 3 ist.

[1] Man sagt dann auch: X_1 *ist fast sicher konstant*