Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 1. Dezember 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

21. S. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\int_0^\infty a^n e^{-a} da = n!$.
b) Die Zufallsvariable X habe die Dichte $\frac{1}{3!} a^3 e^{-a} da$, $a \geq 0$.
i) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
ii) Finden Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Dichte von $Y := \frac{X}{3} + 5$.
iii) Skizzieren Sie (zumindest andeutungsweise) die Dichten von X und Y in einem gemeinsamen Diagramm. Um welchen Faktor ist der Maximalwert der Dichte von Y höher als der Maximalwert der Dichte von X?

22. a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 3$ und $p = 1/2$.
b) Der Wertebereich der Zufallsvariablen X sei $\mathbb{R}_+$, und X besitze eine überall auf $\mathbb{R}_+$ strikt positive Dichtefunktion f. (Damit steht Ihnen auch die Umkehrfunktion F^{-1} der Verteilungsfunktion von F zur Verfügung.)
Begründen Sie: Ist U uniform verteilt auf $[0, 1]$, dann ist $F^{-1}(U)$ so verteilt wie X.
c) Das Beispiel aus Teil a) passt nicht in das Muster von Teil b). Finden Sie dennoch eine Funktion $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, sodass für uniform auf $[0, 1]$ verteiltes U die Zufallsvariable $G(U)$ die Verteilung $\text{Bin}(3, \frac{1}{2})$ hat. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion G an!

23. a) $Z = (X, Y)$ sei uniform verteilt auf $S := \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 1)\}$. Skizzieren Sie die Menge S als Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie $\mathbf{Cov}[X, Y]$.
b) $Z = (X, Y)$ sei uniform verteilt auf $S := ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([-1, 0] \times [-1, 0])$. Berechnen Sie $\mathbf{Cov}[X, Y]$. (Hinweis: Auch für kontinuierlich verteilte reellwertige Zufallvariable gilt die hilfreiche Formel $\mathbf{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$. Außerdem dürfen Sie verwenden, dass es hier nicht auf die "Integrationsreihenfolge" ankommt: $\iint_{[\ell_1, r_1] \times [\ell_2, r_2]} xy \, dxdy = \int_{\ell_1}^{r_1} x \, dx \int_{\ell_2}^{r_2} y \, dy$.)

24. S a) Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$ und $q := 1 - p$ setzen wir $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$. Es sei X $\text{Bin}(n, p)$-verteilt und Y $\text{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. In der Vorlesung haben wir zumindest ansatzweise begründet, warum für großes npq gilt:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{k-\mu}{\sigma})^2} \approx \mathbf{P}(k - \frac{1}{2} \leq Y \leq k + \frac{1}{2}).$$

Für standard-normalverteiltes Z ist $\mu + \sigma Z$ so verteilt wie Y. Folgern Sie daraus, dass für ganzzahlige $c < d$ gilt:

$$\mathbf{P}(c \leq X \leq d) \approx \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sigma}(c - \frac{1}{2} - \mu) \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}(d + \frac{1}{2} - \mu)\right)$$

$$= \Phi\left((\frac{1}{\sigma}(d + \frac{1}{2} - \mu)\right) - \Phi\left((\frac{1}{\sigma}(c - \frac{1}{2} - \mu)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.
b) X sei $\text{Bin}(n, 0.9)$-verteilt. Wie groß darf n maximal sein, wenn die Bedingung

$$\mathbf{P}(X > 100) \leq 0.025$$

eingehalten werden soll? (Hinweis: Verwenden Sie die Normalapproximation sowie die Tatsache, dass für standard-normalverteiltes Z gilt: $\mathbf{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$.