Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 14. November 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

17. S. Die Brutto-Stundensätze für studentische und wissenschaftliche Hilfskräfte an der GU betragen (in Euro) derzeit[1]
A) (ohne Bachelorabschluss) 9.00
B) (mit Bachelor-, ohne Masterabschluss) 10.50
C) (mit Masterabschluss) 14.00.
In einem (fiktiven) Fachbereich sind derzeit 100 Hilfskräfte angestellt, davon 60 in der Kategorie A, 30 in der Kategorie B und 10 in der Kategorie C.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des (als Zufallsvariable aufzufassenden!) Stundensatzes einer rein zufällig aus der Gesamtheit (der "Population") der 100 Hilfskräfte gezogenen Person.
b) Alle 100 Personen werden in rein zufälliger Reihenfolge aufgerufen, dabei ergeben sich die zufälligen Werte $W_1, \ldots, W_{100}$. Wie groß ist die Varianz von $W_1 + \cdots + W_{100}$?
c) Stellen Sie die in b) gefundene Varianz auch über die in der Vorlesung hergeleitete Formel (für die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen) dar und berechnen Sie daraus $\mathrm{Cov}(W_1, W_2)$.
d) 10 Personen werden rein zufällig
(i) mit
(ii) ohne Zurücklegen gezogen, dabei ergeben sich die zufälligen Werte $W_1, \ldots, W_{10}$. Berechnen Sie sowohl im Fall i) als auch im Fall ii) den Erwartungswert und die Varianz des Stichprobenmittels $\frac{1}{10}(W_1 + \cdots + W_{10})$.
e) Um welchen Faktor wird die Standardabweichung des Stichprobenmittles in der Situation der Aufgabe d) i) kleiner, wenn 40 mal statt 10 mal gezogen wird? Um welchen Faktor wird sie in der Situation von d) ii) kleiner, wenn 40 mal statt 10 mal gezogen wird?

18. Wir betrachten wieder die Situation aus Aufgabe 1, mit $p = 0.195$. Finden Sie mit der Chebyshev-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Trefferquote der Menge A
a) bei 100 Versuchen (d.h. 100 auf das Quadrat verteilten Punkten)
b) bei 10000 Versuchen
mit einem Abstand zu p ausfällt, der mehr als 0.02 beträgt.

19. Es sei $(Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf, mit $n \geq 3$. Für $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n$, mit i_1, i_2, i_3 paarweise verschieden, sprechen wir von einem *Erfolgstripel* (i_1, i_2, i_3), wenn Z_{i_1} ebenso wie Z_{i_2} und Z_{i_3} den Ausgang 1 hat.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Erfolgstripel.
b) Finden Sie im Licht des Ergebnisses von a) ein Argument für die folgende Tatsache:
Für eine Bin(n,p)-verteilte Zufallsvariable X gilt: $\mathbf{E}[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$.

20. S U sei uniform auf $[0, 1]$ verteilt, und X sei Exp(2)-verteilt.
Berechnen Sie
(i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte (iii) den Erwartungswert (iv) die Varianz
von
a) U^5 b) $(1-U)^5$ c) $4X + 1$.

[1] Ab 01.01.2016 werden sie auf 9.50, 11.00 bzw. 14.70 erhöht.