Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 17. November 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

13. S. Innerhalb einer Kreisscheibe S mit Durchchmesser 10 cm liegen 4 kleine, disjunkte Kreisscheiben mit Durchmesser je 1 mm, deren Vereinigung sei A.
a) 10000 Punkte werden rein zufällig auf die Menge S verteilt. Berechnen Sie die Poissonapproximation für die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Punkte in die Menge A fallen.
b) Jede Millisekunde werden 10 Punkte auf die Menge S verteilt, immer wieder rein zufällig. Finden Sie die Exponentialapproximation für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der Zeitpunkt des ersten Treffers von A
(i) länger als eine Sekunde
(ii) länger als eine Sekunde, aber nicht länger als 3 Sekunden
auf sich warten lässt.

14. S Es seien n und r natürliche Zahlen. Wir betrachten eine rein zufällige Abbildung $F : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, r\}$.
a) Berechnen Sie für $n = r$ die Wahrscheinlichkeit, dass
(i) F injektiv
(ii) F fixpunktfrei (d.h. $F(i) \neq i$ für alle $i = 1, \dots, n$)
ist. Was ergibt die Stirling-Näherung bei (i)? Finden Sie die Grenzwerte dieser Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$.
b) Berechnen Sie für $n = 10$ und $r = 5$ die Wahrscheinlichkeit, dass F surjektiv ist. (Der Hinweis zur Aufgabe auf S. 58 im Buch ist hilfreich.)

15. a) Wir ziehen 50 mal rein zufällig mit Zurücklegen aus 1000 Individuen und sagen, dass im i-ten und j-ten Zug (mit $i < j$) eine Kollision auftritt, falls in diesen beiden Zügen das selbe Individuum gezogen wird. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Paare (i, j) von Zügen mit $i < j$, bei denen eine Kollision auftritt.
b) Wir betrachten einen Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/1000. Was ergibt die Poisson-Näherung für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "kein Erfolg in den ersten $\binom{50}{2}$ Versuchen"? Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer der in Vorlesung 1b) hergeleiteten Näherungen für die Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit in der Situation von a).

16. Es sei (V, E) ein endlicher Graph, d. h. V (die Menge der *Knoten*) ist eine endliche Menge, und E (die Menge der *Kanten*) ist eine Teilmenge von $\{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$. Es sei m die Gesamtanzahl der Kanten.
a) Wir färben jeden Knoten per fairem Münzwurf (also "unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 1/2") rot oder blau, und bezeichnen die zufällige Teilmenge bestehend aus den roten Knoten mit R. Was ist die erwartete Anzahl von Kanten, die R mit seinem Komplement verbinden?
b) (*Die probabilisitsche Methode.*) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von V existiert, die durch mindestens $m/2$ Kanten mit ihrem Komplement verbunden ist.