Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 10. November 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

9. S. a) In Aufgabe 5 haben wir ein Verfahren zur Erzeugung einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$ kennengelernt.
(i) Wie wahrscheinlich ist es, dass im Schritt von $i-1$ auf i, $i = 1, \ldots, n-1$, ein neuer Zyklus hinzukommt?
(ii)Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Zyklen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, 100$?
b) Die Plätze $1, \ldots, 100$ werden "kreisförmig" angeordnet, sodass sich 2 rechts von 1, 3 rechts von 2, ..., 1 rechts von 100 befindet. Damit hat jeder Platz i einen linken Nachbarn $\ell(i)$ und einen rechten Nachbarn $r(i)$. Sei $X_1, \ldots, X_{100}$ eine rein zufällige Permutation von $1, 2, \ldots, 100$. Wir sagen, dass das Individuum auf dem Platz i ranghöher als seine Nachbarn ist, wenn sowohl $X_{\ell(i)} < X_i$ als auch $X_{r(i)} < X_i$ gilt.
(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Individuum auf Platz 1 ranghöher als seine Nachbarn ist?
(ii) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Individuen, die ranghöher als ihre Nachbarn sind?

10. Es sei $X_1, \ldots, X_{10}$ eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, 10$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2 + X_3$ mindestens $|7 - \mu|$ von ihrem Erwartungswert μ entfernt ausfällt, also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|Y - \mu| \geq |7 - \mu|\}$.

11. S. Wir betrachten ein zufälliges "Würfeln" und $r = 3$. Die Ausgänge 1,2,3 haben dabei die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/3$ und $p_3 = 1/2$. Die Anzahl der Würfe sei $n = 10$.
a) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Würfe, für die der jeweils nächste Wurf eine höhere Augenzahl hat?
b)Was ist die erwartete Anzahl der Runs? (Beispiel: Die Folge $(2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1)$ hat 6 Runs.)

12. Wir betrachten ein Brett mit 25 Feldern, 10 davon weiß und 15 schwarz, sowie 25 Spielsteine, ebenfalls 10 davon weiß und 15 schwarz. Acht Spielsteine werden rein zufällig aus den 25 gewählt und rein zufällig (ohne Mehrfachbelegungen) auf die Felder verteilt.
a) (i) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein bestimmtes weißes Feld besetzt wird?
ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein bestimmtes weißes Feld besetzt wird, und zwar mit einem weißen Stein?
iii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der weißen Felder, die mit weißen Steinen besetzt werden.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
i) genau 3 weiße Steine gewählt werden,
ii) genau 3 weiße Felder besetzt werden
iii) 3 weiße Felder mit weißen Steinen und 5 schwarze Felder mit schwarzen Steinen besetzt werden.