Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 3. November 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

5. S. Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die schon an einem Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der in der Vorlesung betrachteten Permutation 5 , 2, 7, 3, 1, 4, 6 von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\,5)(2)(3\,7\,6\,4)$.
Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n+1$ aus einer Permutation von $1, \dots, n$, ausgehend von deren Zyklendarstellung: *Das Element $n+1$ wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ auf einen der n Plätze rechts neben $1, 2, \dots, n$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ wird das Elemet in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.*
a) Zeichnen Sie (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend vom trivialen Zyklus (1), zu den 6 Permutationen von 1, 2, 3 führen.
b) Warum liefert der Algorithmus für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rein zufällige Permutation von $\{1, \dots, n\}$?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $\{1, \dots, 100\}$
(i) 1 und 2 (ii) 80 und 90
im selben Zyklus?

6. $U_1, U_2, \dots,$ seien rein zufällige Punkte im Intervall $[0, 1]$. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
(i) $\{U_1 < U_2 < \cdots < U_{20}\}$,
(ii) $\{U_1 < \min_{2 \le i \le 20} U_i\}$,
(iii) $\{U_{21} < U_1 < \min_{2 \le i \le 20} U_i\}$.
Verwenden Sie dabei, dass die Ränge der U_i eine rein zufällige Permutation bilden.

7. S. (i) (X_1, X_2, X_3) sei eine uniform verteilte Besetzung von 3 Plätzen mit 10 Objekten. Wie wahrscheinlich ist es, dass kein Platz leer bleibt? Beschreiben Sie die Menge der zugehörigen Ausgänge in dem in der Vorlesung 2a betrachteten de Finetti-Dreieck.
(ii) Sei $r \le n$. Begründen Sie: Die Anzahl der Besetzungen von r Plätzen mit n Objekten, die keinen Platz leer lassen, ist gleich der Anzahl der Besetzungen von r Plätzen mit $n-r$ Elementen.
(iii) $(X_1, \dots, X_n)$ sei eine uniform verteilte Besetzung von r Plätzen mit n Objekten. Wie wahrscheinlich ist es, dass kein Platz leer bleibt?

8. Wir betrachten die in Aufgabe 1 beschriebenen Situation. Zur Erinnerung: Der Flächenanteil von A im Quadrat war $p = 0.195$. Die Anzahl der rein zufällig (nacheinander) ins Quadrat gesetzten Punkte sei $n = 100$.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen die ersten 20 Punkte in die Menge A und die restlichen nicht?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Punkte, die A fallen, gleich 20? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Monte-Carlo-Ergebnis bei 1000 Wiederholungen.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen
(i) weniger als 11
(ii) mehr als 27 Punkte
in die Menge A? (Hinweis: Der R-Befehl sum(dbinom(k1:k2, n, p)) - mit jeweils passender Wahl der Summationsgrenzen k_1 und k_2 - ist hilfreich. Mehr Information bekommen Sie, wenn Sie z.B. den Befehl *?dbinom* in die R-Konsole eingeben.)