Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

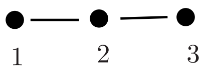
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 2. Februar 2016, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

49. Für $n \geq 0$ sei $S_n := \{a_0 a_1 \dots a_n : a_i \in \{0, \dots, n\}$ paarweise verschieden$\}$ und X_n eine Zufallsvariable mit Wertebereich S_n, wobei die Folge $(X_1, X_2, \dots)$ so aufgebaut wird:
Gegeben $X_n = a_0 a_1 \dots a_n$ entsteht X_{n+1} so, dass $n+1$ rein zufällig in einen der insgesamt $n+2$ möglichen Slots "links von a_0, zwischen a_0 und a_1, …, rechts von a_n" platziert wird.
a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: X_n ist uniform verteilt auf S_n.
b) Für $a = a_0 a_1 \dots a_n \in S_n$ sei $L(a)$ die Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$, für die j links von 0 steht, und $R(a)$ die Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$, für die j rechts von 0 steht (z. B. ist $L(350142) = 2$).
Begründen Sie: Gegeben $\{L(X_1) = k_1, \dots, L(X_n) = k_n\}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{L(X_{n+1}) = k_n + 1\}$ gleich $\frac{k_n+1}{n+2}$.
c) Folgern Sie aus b): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $((L(X_n), R(X_n))_{n=1,\dots,m}$ so verteilt wie die Farbanzahlen der ersten m Zugänge in einer Pólya-Urne (mit anfänglich einer weißen und einer blauen Kugel in der Urne).

Feinschmeckern ist an dieser Stelle empfohlen, eine Brücke zu den beiden Beispielen im Buch, Seite 113, zu schlagen: Sei $U = (U_0, U_1, U_2, \dots)$ eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ uniform verteilte Zufallsvariablen. Für paarweise verschiedene $u_0, u_1, \dots \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $a_0 a_1 \dots a_n =: \Pi_n(u)$ diejenige Permutation von $0, 1, \dots, n$, für die $u_{a_0} < u_{a_1} \dots < u_{a_n}$ gilt. Außerdem setzen wir $L_n(u) := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{u_j < u_0\}}$, $R_n(u) := \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{u_j > u_0\}}$. Dann hat die Folge $(\Pi_1(U), \Pi_2(U), \dots)$ dieselbe Verteilung wie die Folge $(X_1, X_2, \dots)$, und folglich ist $((L_n(U), R_n(U))_{n=1,2\dots}$ so verteilt wie $((L(X_n), R(X_n))_{n=1,2,\dots}$ Das Gesetz der großen Zahlen angewandt auf die Folge $I_{\{U_j < U_0\}}$, $j = 1, 2, \dots$, und bedingt unter U_0, liefert dann sofort die interessante Tatsache, dass der relative Anteil der weißen Kugeln für $n \to \infty$ gegen eine auf $[0,1]$ uniform verteilte Zufallsvariable konvergiert.

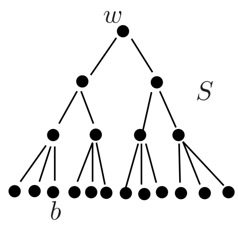
50. S. a) Wir betrachten eine rein zufällige Folge der Buchstaben A, B, C.
a) Wie wahrscheinlich ist es, dass das Muster ABA vor dem Muster BAC erscheint?
b) Was ist die erwartete Anzahl der Buchstaben, die auftreten, bis erstmals
(i) das Muster ABA
(ii) das Muster BAC
erscheint? (Zur Erklärung: In der Folge $BCABA$ sind 5 Buchstaben aufgetreten, bis erstmals das Muster ABA erschienen ist.) Konstruieren Sie hierfür jeweils einen Graphen mit wenigen Knoten, der den "Weg entlang des Aufbaus des Musters" und die möglichen "Rückschläge" beschreibt.

51. S a) Es sei $X_0, X_1, \dots$ eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem nebenstehend skizzierten Graphen mit den Konoten 1,2,3, und $Y_n := \mathbf{1}_{\{1,2\}}(X_n)$.



Berechnen Sie (i) $\mathbf{P}(Y_3 = 0 \,|\, Y_0 = 0, Y_1 = 1, Y_2 = 1)$ (ii) $\mathbf{P}(Y_3 = 0 \,|\, Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 1)$
Ist (Y_n) eine Markovkette?

b) Wieder sei $X_0, X_1, \dots$ eine gewöhnliche Irrfahrt, diesmal auf dem nebenstehend skizzierten Baum mit der Knotenmenge S. Für jeden Knoten k sei $h(k)$ die *Tiefe* von k (also z.B. $h(w) = 0$, $h(b) = 3$).
i) Ist $Y_n := h(X_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ eine Markovkette?
ii) Wieviele Schritte benötigt die Irrfahrt bei Start in b in Erwartung bis zum ersten Treffen von w?
iii) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung von (X_n).



52. S.[1] *"Kann das Zufall sein?"* Die Größe X eines Stücks in einer seriellen Fertigung sei die Summe aus einem Normwert μ_0 und einem "zufälligen Fehler" mit Standardabweichung σ. Von Stück zu Stück seien die Fehler unabhängig und identisch verteilt. Denken wir uns μ_0 als 5, und stellen wir uns vor, es sei bekannt, dass $\sigma = 0.1$ ist. Ein Qualitätskontrolleur entnimmt eine Stichprobe vom Umfang 30 und misst den Mittelwert 5.1. Wie wahrscheinlich ist eine mindestens so große Abweichung unter der beschriebenen Hypothese?

[1] Dieses Blatt hat - als einziges der insgesamt 12 Übungsblätter - 3 S-Aufgaben. Es bleibt bei der Bemessungsgrundlage von 24 S-Aufgaben; eine der 25 S-Aufgaben ist damit als "Bonus-Aufgabe" anzusehen.