Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 26. Januar 2016, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

45 a) Noch einmal betrachten wir die Situation aus Aufgabe 1, mit $p = 0.195$. Finden Sie mit der Normalapproximation eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Trefferquote der Menge A

i) bei 100 Versuchen (d.h. 100 auf das Quadrat verteilten Punkten)

ii) bei 10000 Versuchen

mit einem Abstand zu p ausfällt, der mehr als 0.02 beträgt.

b) In einem p-Münzwurf der Länge 100 (diesmal mit unbekanntem p) sei K die zufällige Anzahl der Erfolge. Finden Sie ein um $\hat{p} := K/n$ konstruiertes zufälliges Intervall, das den Parameter p mit Wahrscheinlichkeit 0.99 enthält. Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass $(\hat{p} - p)/\sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}$ annähernd standard-normalverteilt ist.

46. a) In einem Münzwurf $(Z_1, Z_2, \ldots)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p sei W die Anzahl der Versuche bis zum n-ten Erfolg. Zeigen Sie

$$\mathbf{P}(W = n+i) = \binom{n+i-1}{i} p^n q^i \ , \quad i = 0, 1, \ldots$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst für eine Teilmenge a von $\{1, \ldots, n+i-1\}$ mit $n-1$ Elementen die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(Z_j = 1 \text{ für } j \in a \cup \{n+i\}, Z_j = 0 \text{ für } j \in \{1, \ldots, n+i-1\} \setminus a)$. Überlegen Sie dann, wieviele derartige Mengen a es gibt.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe von n unabhängigen, Exp(1)-verteilten Zufallsvariablen hat die Dichte

$$f_n(b)\, db = \frac{1}{(n-1)!} b^{n-1} e^{-b} db, \quad b \geq 0.$$

Hinweis: Es reicht, die folgende Rekursion nachzuprüfen (warum?): $\int_0^b f_{n-1}(a) f_1(b-a)da = f_n(b)$, $b \geq 0$.

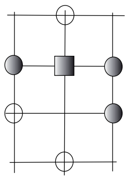
47. S. In einem System treten zwei Defekte D_1 und D_2 unabhängig voneinender auf, und zwar D_1 mit Wahrscheinlichkeit 0.01 und D_2 mit Wahrscheinlichkeit 0.001. Tritt **nur** der Defekt D_1 auf, dann fällt das System mit Wahrscheinlichkeit 0.01 aus, tritt **nur** der Defekt D_2 auf, dann fällt das System mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aus, treten beide Defekte zusammen auf, dann ist der Ausfall des Systems sicher. Berechnen Sie, gegeben das System fällt aus, die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) nur der Defekt D_1 eingetreten ist

(ii) nur der Defekt D_2 eingetreten ist

(iii) beide Defekte zusammen eingetreten sind.

48. S. Wir betrachten eine *gewöhnliche Irrfahrt* auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem aus den vier Nachbarpunkten rein zufällig ausgewählten. Der Startpunkt sei $(1, 2)$.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Irrfahrt die Menge $\{(0,1), (1,0), (1,3)\}$ vor der Menge $\{(0,2), (2,1), (2,2)\}$?

b) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Schritte, bis die Irrfahrt die Menge $\{(0,1), (0,2), (1,3), (2,2), (2,1), (1,0)\}$ trifft?