Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 27. Oktober 2015, vor der Vorlesung (10:05-10:15 im Magnus HS)

1. S. In der Vorlesung haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche ("Quadrat") G mit einem einfachen Monte-Carlo-Verfahren geschätzt: n Punkte wurden rein zufällig in G geworfen und der Anteil M der Treffer von F ermittelt. Die Verteilung von M hat uns ein Bild von der Zuverlässigkeit der Schätzung vermittelt. Um ein erstes Gefühl für den Begriff der Verteilung zu bekommen, betrachten wir den Fall $n = 2$.
a) Wie wahrscheinlich ist es, dass der erste der beiden Punkte in F landet und der zweite nicht?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass einer der beiden Punkte in F landet und der andere nicht?
c) Bestimmen Sie den Wertebereich und die Verteilungsgewichte von M (i) für allgemeines p (ii) für $p = 0.195$ (das war der Anteil der Fläche des in der Vorlesung betrachteten "blauen Polygons" an der Quadratfläche).
d) Verwenden Sie das über den Link auf der StofI-Web-Seite zur Verfügung gestellte R-Programm "Monte Carlo Simulation", um (für $p = 0.195$) die Verteilung von M mit einem Histogramm der Schätzwerte aus 1000 Wiederholungen zu vergleichen.[1]

2. Erkunden Sie in der in Aufgabe 1 beschriebenen Situation (wieder für $p = 0.195$) mittels des R-Programms "Monte Carlo Simulation", wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn (i) $n = 100$ (iii) $n = 400$ (ii) $n = 1600$ Punkte in die Menge G geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmäler?

3. $X = (X_1, X_2)$ sei eine rein zufällige Wahl aus $S := \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, 2, \dots, 32\}, a_1 \neq a_2\}$.
a) Berechnen Sie
(i) $\mathbf{P}(X_1 \in \{1, \dots, 8\})$ (ii) $\mathbf{P}(X_2 \in \{1, \dots, 8\})$
b) Sie schlagen nacheinander die erste und die zweite Karte eines perfekt gemischten Kartenstapels auf (32 Karten, 8 davon haben die Farbe Herz). Wie wahrscheinlich ist es, dass die zweite aufgeschlagene Karte die Farbe Herz hat?

4 S. Drei Objekten werden Zahlen aus $\{1, \dots, r\}$ zugewürfelt, genauer: sie werden mit dem Ergebnis einer rein zufälligen Wahl aus $\{1, \dots, r\}^3$ versehen. Wie groß muss r sein, damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "jedes der drei Objekte bekommt eine andere Zahl" mindestens 0.99 beträgt? Finden Sie das Ergebnis
(a) über die exakte Berechnung
(b) über die in der Vorlesung betrachtete Näherung $\exp(-\frac{n(n-1)}{2r})$.

[1] Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org, zu finden auch über google $\to$ R, auf Ihren Rechner.