Vorlesung 9b

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 1

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,

das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,

gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

X_2:= die dann geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}_{\text{fair}}(X_2 = 6) = \tfrac{1}{6}$$

$$\mathbf{P}_{\text{gezinkt}}(X_2 = 6) = \tfrac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 6) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1,2,3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Gegeben $X_1 = 3$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2,4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 3:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Gegeben $X_1 = a_1$

hat X_2 die Verteilung N$(a_1, 1)$.

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Damit ist gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $X_1 = a_1$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \,.)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2

mit den Gewichten

$$\mu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\;.$$

$$\mu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

$P(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P.

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

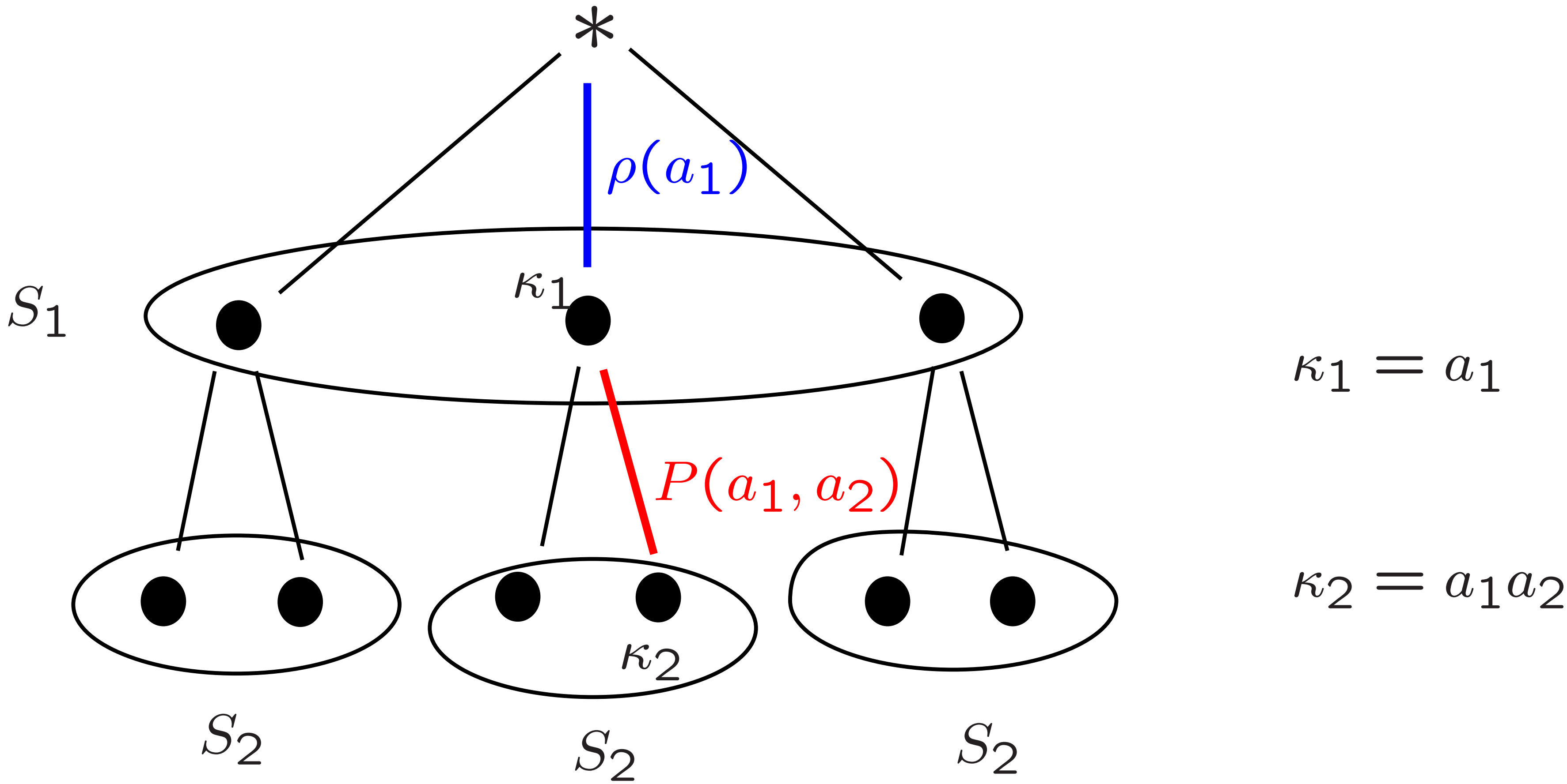
Die Zeilensumme von $\mu(a_1, .)$ ergibt $\rho(a_1)$.

Die Gesamtsumme aller $\mu(a_1, a_2)$ ist 1.

Ein zweistufiges Zufallsexperiment

kann in seiner Abfolge

durch einen *Baum der Tiefe* 2 veranschaulicht werden:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

Wir bemerken: Genau dann

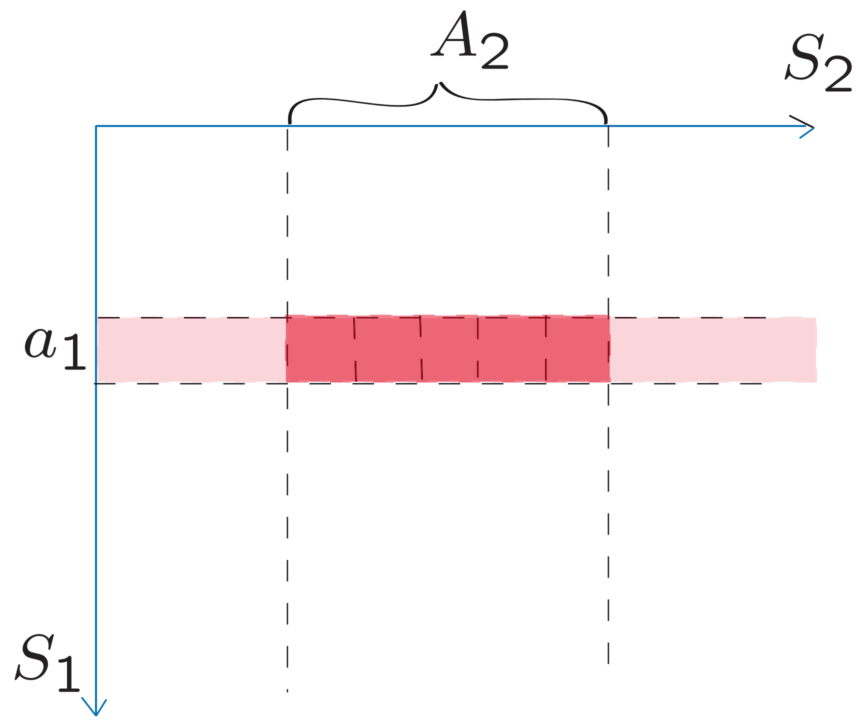
hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,

wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Summiert über $a_2 \in A_2$, mit $A_2 \subset S_2$, erhält man daraus:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$


A_2
S_2
a_1
S_1

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

Summation über $a_1 \in A_1$, mit $A_1 \subset S_1$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Speziell mit $A_1 = S_1$ bekommt man die

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\,.$$

Diese zerlegt

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_2 \in A_2\}$

nach den Ausgängen von X_1.

Ist X_2 reellwertig (also $S_2 \subset \mathbb{R}$),

dann setzen wir für jedes $a_1 \in S_1$

$$\mathbf{E}_{a_1}[X_2] := \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \; ,$$

vorausgesetzt, die rechte Seite existiert,

und sprechen vom

Erwartungswert von X_2, gegeben $X_1 = a_1$.

Nicht nur die Verteilung von X_2 lässt sich
nach den Ausgängen von X_1 zerlegen,
sondern auch sein Erwartungswert.

Anders gesagt:
Es gibt auch die “Formel vom totalen Erwartungswert”:

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{E}_{a_1}[X_2].$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{E}_{a_1}[X_2] \, \mathbf{P}(X_1 = a_1).$$

Also haben wir die einprägsame Formel

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]] = \mathbf{E}[X_2] \; .$$

(Zerlegung des Erwartungswertes von X_2 nach X_1.)