Vorlesung 4b

Das Rechnen mit

Indikatorvariablen und Ereignissen,

Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten.

Wir wissen schon:

Eriegnisse kann man oft

auf verschiedene Weise darstellen:

Beispiel 1:

Sei (X_1, X_2) das Paar der Augenzahlen

beim zweimaligen (gewöhnlichen) Würfeln.

$$\{X_1 = 3\}$$
$$= \{(X_1, X_2) \in \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}\}$$

$$\{X_1 + X_2 = 3\} = \{(X_1, X_2) \in \{(1,2), (2,1)\}\}$$

Beispiel 2: Kollisionen (vgl. Vorlesung 1b):

Wir stellen uns vor, dass die Individuen

der Reihe nach ihr Kennzeichen bekommen.

X_i ... zufälliges Kennzeichen des i-ten Individuums

T sei der Moment der ersten Kollision:

$$T = \min\{i \geq 1 : X_i = X_j \text{ für ein } j < i\} \ .$$

Dann gilt für das Ereignis

“keine Kollision unter den ersten n Individuen”:

$$\{X_i \neq X_j \text{ für } j < i \leq n\} = \{T > n\} \ .$$

Allgemeiner gilt

für die “Verarbeitung” $h(X)$ einer Zufallsvariablen X:

$$\{h(X) \in B\} = \{X \in h^{-1}(B)\}.$$

Wir erinnern an eine Definition aus Vorlesung 3b

(vgl. Buch S. 36-38):

Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich S und $A \subset S$ betrachten wir die Zufallsvariable $\mathbf{1}_A(X)$.

Sie nimmt den Wert 1 an, wenn das Ereignis $\{X \in A\}$ eintritt, und den Wert 0, wenn das Ereignis $\{X \in A^c\}$ eintritt.

$$I_{\{X \in A\}} := \mathbf{1}_A(X)$$

heißt *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{X \in A\}$.

$$\{X \in A\} = \{I_{\{X \in A\}} = 1\},$$

Für jedes Ereignis E gilt: $E = \{I_E = 1\}$.

Ereignisse sind gleich,

wenn das für ihre Indikatorvariablen zutrifft.

Und mit Indikatorvariablen lässt sich leicht rechnen.

Für jede S-wertige Zufallsvariable X gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die "sicher" auf den Ausgang 1 fällt.

$$I_{\{X \in \emptyset\}} = \mathbf{1}_\emptyset(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die "sicher" auf den Ausgang 0 fällt.

Das *sichere Ereignis* E_{s} ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 1 annimmt.

$$I_{E_{\mathrm{s}}} = 1$$

Das *unmögliche Ereignis* E_{u} ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 0 annimmt:

$$I_{E_{\mathrm{u}}} = 0.$$

Für zwei Ereignisse E_1, E_2

hat deren "Oder-Ereignis" die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cup E_2} := \max(I_{E_1}, I_{E_2})$$

und deren "Und-Ereignis" die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cap E_2} := \min(I_{E_1}, I_{E_2}).$$

Man spricht auch von "Vereinigung" und "Durchschnitt"

der Ereignisse E_1 und E_2.

Für $b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ gilt die Identität:

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2).$$

Dies überträgt sich auf

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

Falls

$$E_1 \cap E_2 = E_{\mathsf{u}} \ ,$$

so heißen E_1 und E_2

disjunkte oder *sich ausschließende Ereignisse*.

Gilt $E_1 = E_1 \cap E_2$, so schreiben wir

$$E_1 \subset E_2 \ .$$

und sagen:

“Mit E_1 tritt sicher auch E_2 ein”

oder auch

“Das Ereignis E_1 zieht das Ereignis E_2 nach sich.”

Für jedes Ereignis E ist sein *Komplementärereignis*

$$E^c$$

definiert durch

$$I_{E^c} := 1 - I_E \quad \text{bzw.} \quad E^c := \{I_E = 0\} \ .$$

Wegen $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ gilt

$$\{X \in A\}^c = \{X \in A^c\} \ .$$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in S^2.

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

bzw.

$$I_{\{X=Y\}} = \mathbf{1}_D(X, Y)$$

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}$$

mit $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$,

der Halbraum über (und einschließlich) der Diagonalen.

Wir schreiben

$$X \leq Y \quad :\Leftrightarrow \quad \{X \leq Y\} = E_{\text{S}} \,.$$

Bringen wir jetzt wieder Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Für Indikatorvariablen und Ereignisse

gilt die Beziehung

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen

und aus der Linearität des Erwartungswertes

ergeben sich die Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

(Buch S. 57-58):

(i) $\mathbf{P}(E_\mathsf{s}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_\mathsf{u}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$,

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E)$.

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$, falls $E_1 \subset E_2$.

Bei (ii) verwendet man die Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

(ii) wird verallgemeinert durch die

Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$

$$= \sum_i \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \cdots \pm \mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n) \,.$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der I_{E_i} als 1 ausfällt,

ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i<j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots .$$

Gehe dann über zum Erwartungswert. $\square$

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei eine
rein zufällige Permutation von $(1, \dots, n)$.
Was ist die W'keit, dass X mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis
"X hat Fixpunkt an der Stelle i". Offenbar gilt:
$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = (n-k)!/n!$, falls $i_1 < \cdots < i_k$
Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit
$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}.$ $\square$
(Für $n \to \infty$ konvergiert das übrigens gegen $1 - e^{-1}$.)

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 54)

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Zur Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend damit, dass der Wertebereich von X eine Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ ist.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert eine abzählbare Teilmenge S des Wertebereichs mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$. Für diese gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) = 0 + \sum_{a \in S : a > 0} a\mathbf{P}(X = a).$$

woraus sich beide Aussagen ergeben. $\Box$

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$

Beispiel:

X reellweertige Zufallsvariable, $c > 0$.

Dann gilt $\quad c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq |a|, \quad a \in \mathbb{R} \quad$ und daher

$$cI_{\{|X|\geq c\}} \leq |X|.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{|X|\geq c\}}] \leq \mathbf{E}[|X|]$$

$$\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[|X|]}$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov.**

Beispiel:

X reellweertige Zufallsvariable, $c > 0$.

Dann gilt $\quad c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq |a|, \quad a \in \mathbb{R} \quad$ und daher

$$cI_{\{|X|\geq c\}} \leq |X|.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{|X|\geq c\}}] \leq \mathbf{E}[|X|]$$

$$\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[|X|]}$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov.**