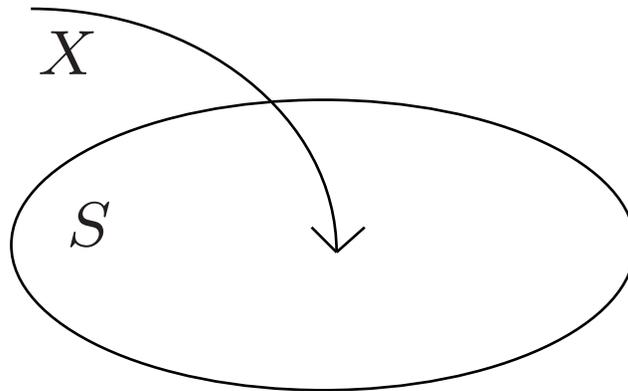


# Vorlesung 2a

## Diskret uniform verteilte Zufallsvariable



$X$  ... **Zufallsvariable**

mit *Zielbereich (Wertebereich)  $S$*

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *diskret uniform verteilt*,  
wenn ihr Zielbereich  $S$  endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt  $X$  eine **rein zufällige Wahl**  
aus der (endlichen) Menge  $S$ .

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \dots, r\}^n$$

$X :=$  rein zufällige  $1, \dots, r$  - Folge der Länge  $n$ .

Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch  
einige *Hilfen fürs Abzählen*.

# 1. Rein zufällige Permutation

Eine *Permutation* von  $1, \dots, n$   
ist eine bijektive Abbildung der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich.

Z. B. mit  $n = 7$

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

Wie wahrscheinlich ist es,  
dass eine rein zufällige Permutation  
genau **so** ausfällt?

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

mal  $(n - 2)$  Möglichkeiten für das Bild von 3

...

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 =: n!$$

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, n$ ,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$  die Menge aller Permutationen von  $1, \dots, n$   
ist, und die auf  $S$  uniform verteilt ist.

Für alle Elemente  $a \in S$  gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Wie kommen rein zufällige Permutationen zustande?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern  
beim  $n$ -maligen rein zufälligen Ziehen ohne Zurücklegen  
aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne  
mit anfangs  $n$  Kugeln, beschriftet mit den Nummern  $1, \dots, n$ .  
Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle  $n$  Kugeln,  
notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

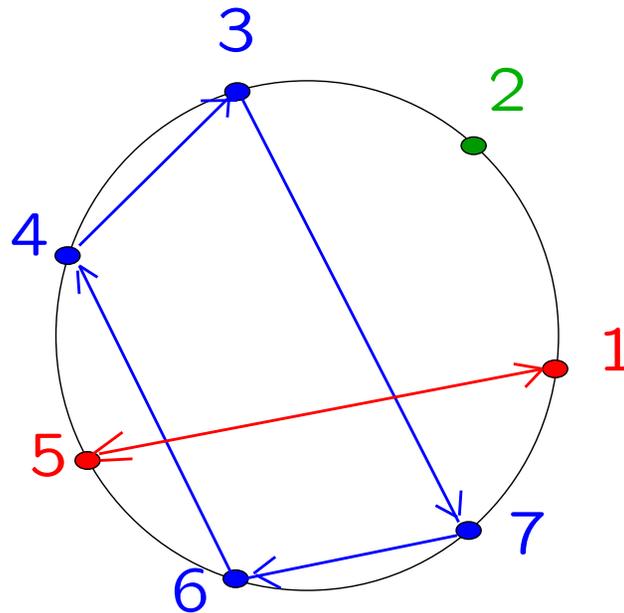
Eine rein zufällige Permutation ergibt sich *auch*  
als  $n$ -tupel der Ränge der gezogenen Punkte  
beim  $n$ -maligen rein zufälligen Ziehen aus  $[0, 1]$

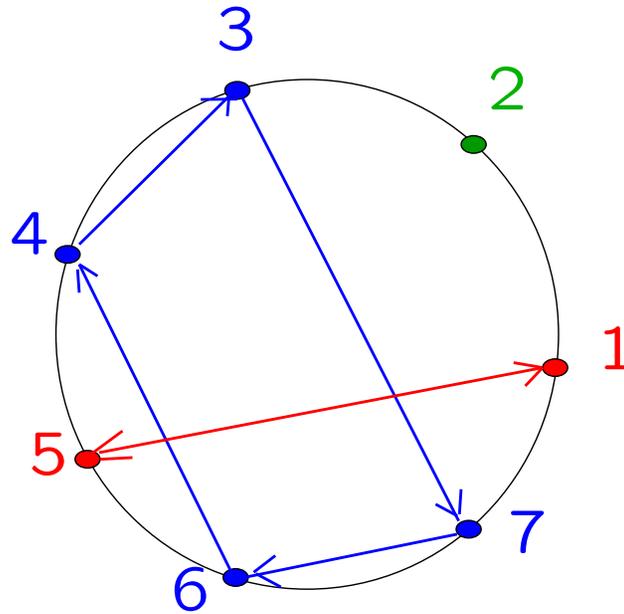
(dabei bekommt der kleinste Punkt den Rang 1,  
der zweitkleinste den Rang 2,  
.....  
der größte den Rang  $n$ .)

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6





Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier  
zwei.

Für eine Permutation  $a \in S$  bezeichne

$$h(a)$$

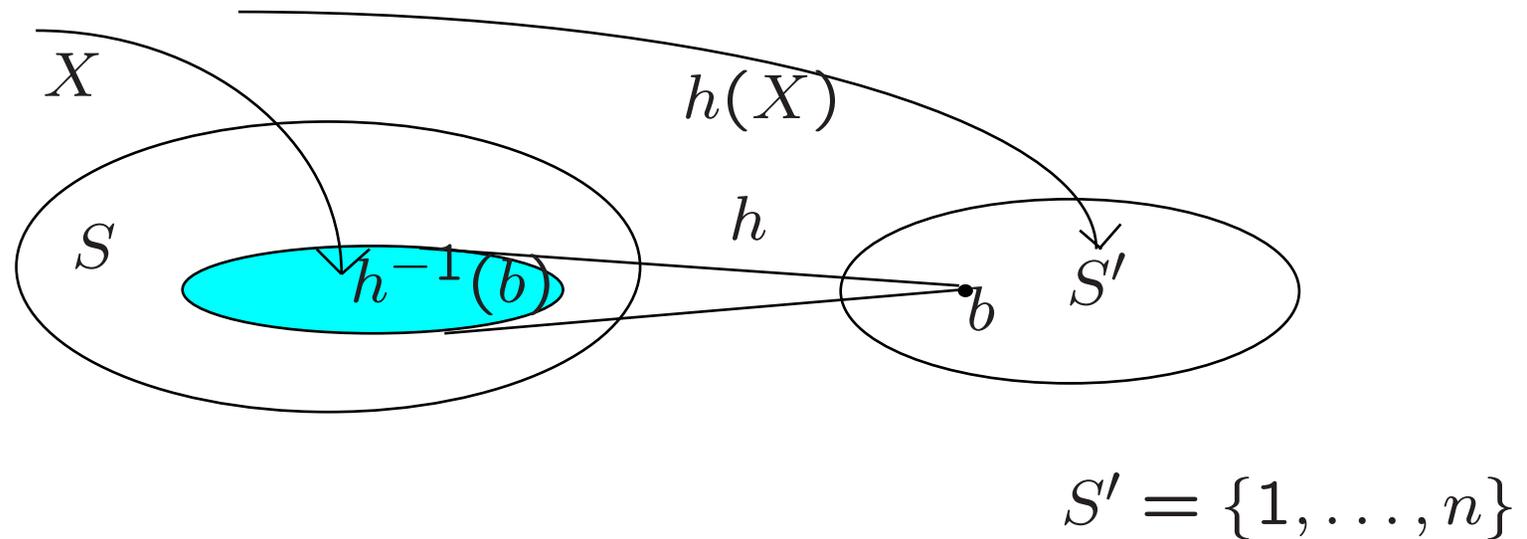
die Länge des Zyklus von  $a$ , der die Eins enthält.

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $\{1, \dots, n\}$ ,

also eine rein zufällige Wahl aus  $S$ ,

und sei  $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$



Wieviele Permutationen  $a \in S$  gibt es mit  $h(a) = b$ ?

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\begin{aligned} \#A &= (n-1)(n-2) \cdots (n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b) \cdots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

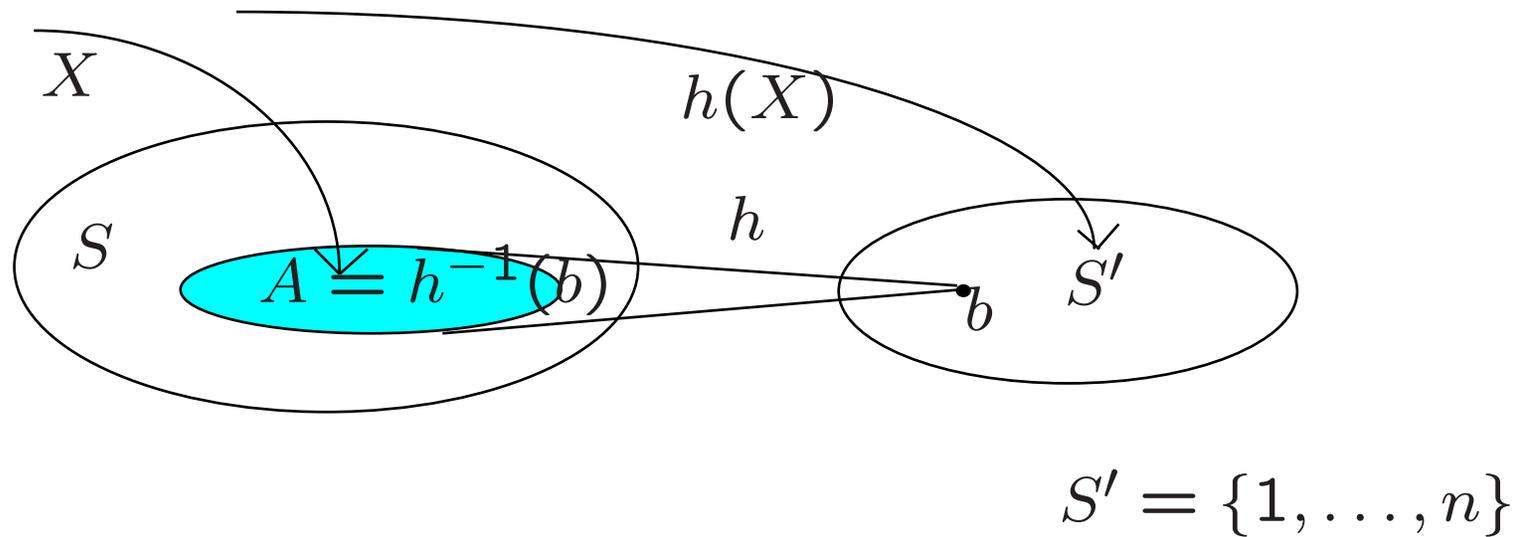
$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$A = \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \dots, n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus  
einer rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,  
der die Eins enthält,  
ist uniform verteilt auf  $\{1, \dots, n\}$ .

## 2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

Sei  $0 \leq k \leq n$

und sei  $Y$  eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge  
von  $\{1, \dots, n\}$  .

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis  $\{Y = \{1, \dots, k\}\}$  ?

Der Zielbereich von  $Y$  ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\} ,$$

die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

Wieviele  $k$ -elementige Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es  $n(n-1) \cdots (n-k+1)$  mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,  
also führen jeweils  $k!$  dieser Wahlprotokolle  
auf dieselbe  $k$ -elementige Teilmenge.

$$\#S = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

*Binomialkoeffizient „n über k“.*

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

$\binom{n}{k}$  ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ $k$  aus  $n$ “

( $k$ -elementige Teilmengen aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $k$ -köpfige Komitees aus  $n$  Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= (x + y)(x + y) \cdots (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

Die Potenz  $k$  gibt an, wie oft der Faktor  $x$  zum Zug kommt.

# Pascal'sches Dreieck

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
					.					
					.					

					1				
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	
									1

Rekursion: 
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  Männern und einer Frau ein  $k + 1$  köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder **die Frau ist nicht dabei...** **oder sie ist dabei...**

Wie gewinnt man eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt (für  $k \leq n$ ):

Ist  $X = (X_1, \dots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,

dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

Anders gesagt:

Beim **Ziehen ohne Zurücklegen**  
führen die ersten  $k$  Züge auf eine  
rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne  
mit  $k$  roten und  $n - k$  blauen Kugeln.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne  
mit  $k$  roten und  $n - k$  blauen Kugeln.

Notiere die **Nummern  $X_1, \dots, X_k$  der Züge**,  
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne  
mit  $k$  roten und  $n - k$  blauen Kugeln.

Notiere die **Nummern  $X_1, \dots, X_k$  der Züge**,  
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

Intermezzo:

## Besetzungszahlen

Sei  $a = (a_1, \dots, a_n)$  eine  $1, \dots, r$  - Folge der Länge  $n$ .

Vorstellung:  $i$  kommt auf Platz  $a_i$ .

Wie oft wird in  $a$  der Platz  $j$  besetzt?

Anders gesagt: Für wieviele  $i$  ist  $a_i = j$ ?

$$b_j(a) := \#\{i : a_i = j, 1 \leq i \leq n\}$$

Das  $r$ -tupel der Besetzungszahlen  $b_j(a)$  nennen wir kurz  
“die (durch  $a$  induzierte) Besetzung”.

In der Vorstellung des sukzessiven Setzens  
von  $n$  Objekten auf  $r$  mögliche Plätze  
gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen  
(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung, die aus einem auf  $\{1, \dots, r\}^n$  uniform verteilten  $X$  entsteht.

Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:

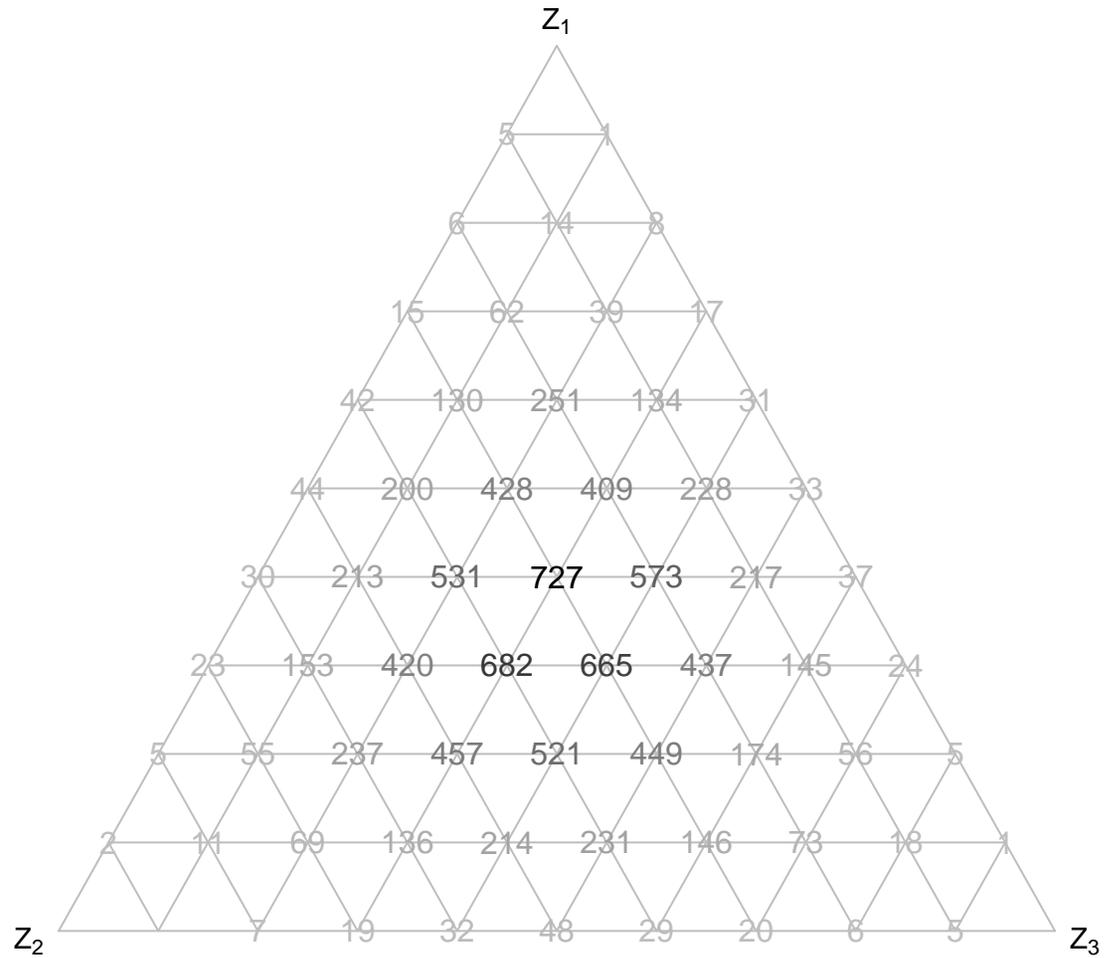
$n$  Individuen werden rein zufällig (und “unabhängig”) auf  $r$  mögliche Plätze gesetzt.

Es folgt das Ergebnis einer Simulation für  $n = 10$  und  $r = 3$ .

Die Ecken des *de Finettii-Dreiecks* auf der nächsten Folie entsprechen den Besetzungen

$(10, 0, 0)$  (oben),  $(0, 10, 0)$  (links) und  $(0, 0, 10)$  (rechts).

## Häufigkeiten der Besetzungen bei 10000 Wiederholungen



Wir sehen aus der Simulation:

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist  
(bei weitem) nicht uniform.

Wir kommen auf diese Verteilung  
in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

### 3. Uniform verteilte Besetzung

von  $r$  Plätzen mit  $n$  Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$k$  ist ein  $r$ -tupel von Besetzungszahlen, kurz: eine Besetzung.

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von  $S_{n,r}$  nach

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + r - 1$

mit genau  $n$  Einsen

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel:  $n = 5, r = 4$ :

$$(k_1, k_2, \dots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des  $j$ -ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz  $j$ .

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt. Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den  $r$  Plätzen, insgesamt gibt es  $r - 1$  solche Trennwände.

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + r - 1$   
mit genau  $n$  Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n + r - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit  $n$  weißen und  $r - 1$  schwarzen  
Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen  
und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus  $S$ .

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von  $h$ )

in eine rein zufällige Besetzung.