Vorlesung 1b

Wiederholte rein zufällige Wahl

(aus endlich vielen möglichen Ausgängen)

mit dem Beispiel

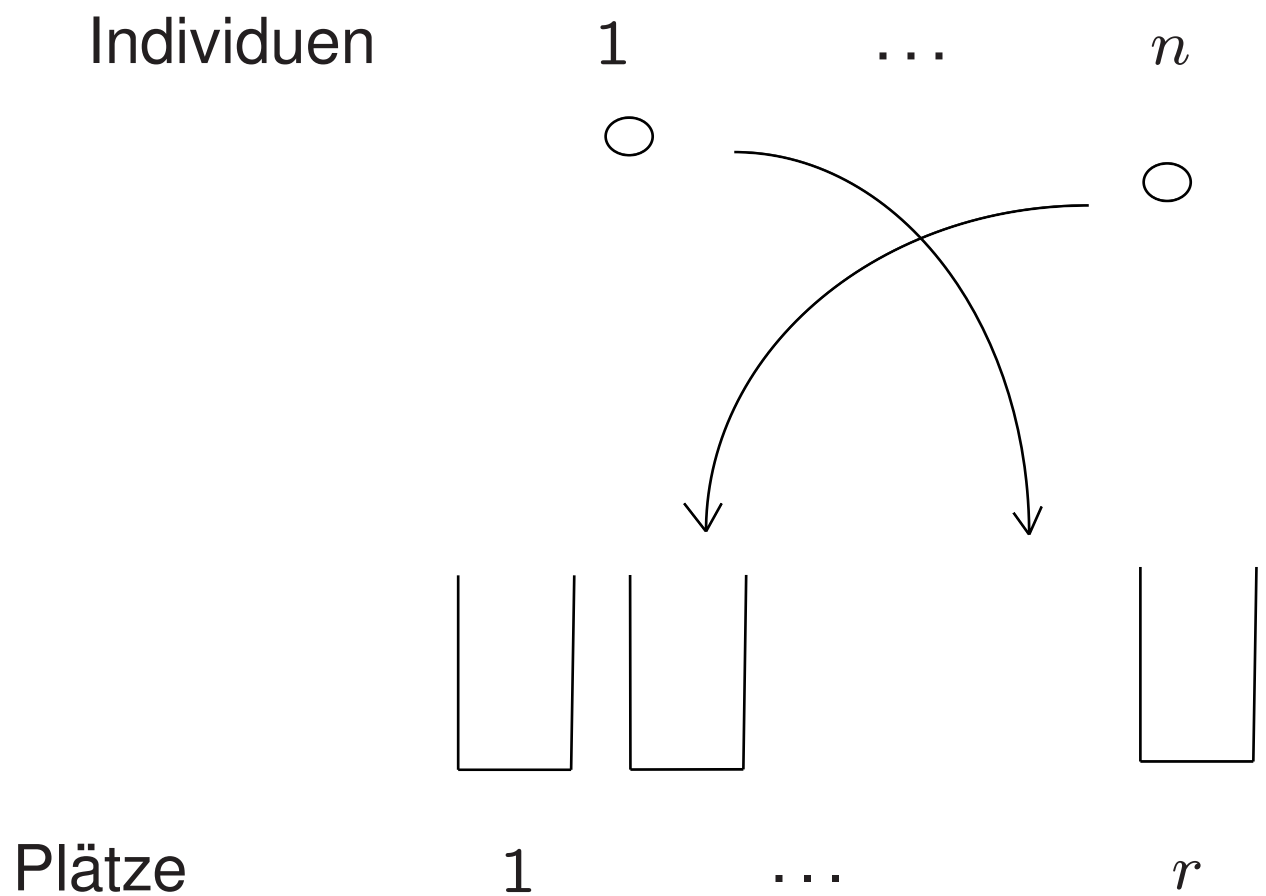
“Wahrscheinlichkeit von Kollisionen”

$n = 25$ Individuen,

$r = 365$ Plätze.

Jedes Individuum wird auf einen
rein zufällig ausgewählten Platz gesetzt.
(Mehrfachbelegungen sind erlaubt!)

Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei
keine Mehrfachbelegung auftritt?


Individuen
1
...
n
Plätze
1
...
r

Ein anderer Blick:

Jedes von n Individuen

ist mit je einem von r möglichen Kennzeichen versehen,

das vom Zufall bestimmt ist.

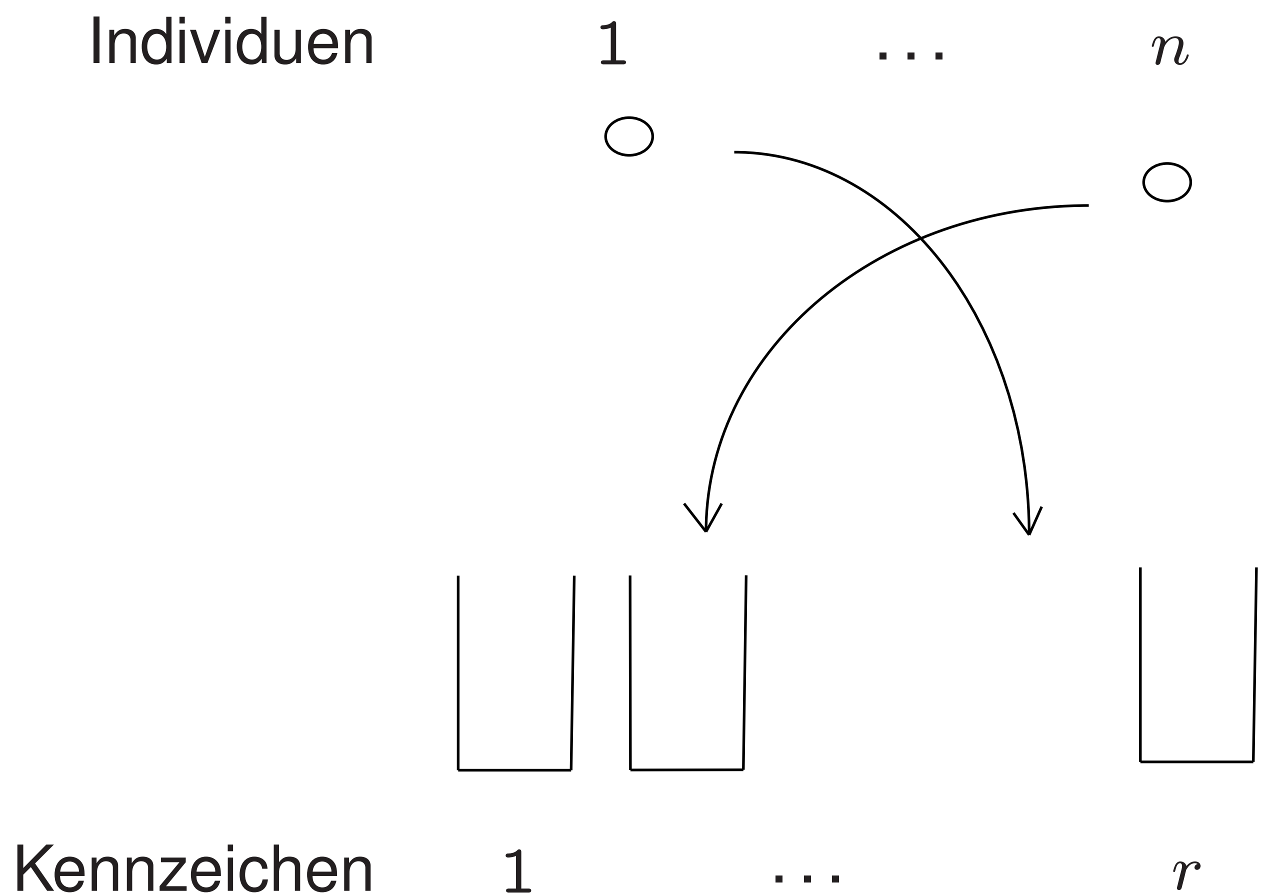
Wie stehen die Chancen,

dass alle Individuen verschieden gekennzeichnet sind?

Oder anders gesagt:

dass keine zwei der n Individuen gleich gekennzeichnet sind?

(ein Zitat aus “dem Buch”, Seite 1)


Individuen
1
...
n
Kennzeichen
1
...
r

In der Informatik denkt man bei den Individuen an Daten
und spricht bei den Kennzeichen
von Hash-Werten oder Fingerabdrücken.

Populäre Version:

$n = 25$ Leute auf einer Party

Kennzeichen ... Geburtstag ($\in \{1, 2, \ldots, 365\}$)

Wie wahrscheinlich ist es,

dass keine zwei Leute am selben Tag Geburtstag haben?

Die Individuen denken wir uns mit 1 bis n

und die Kennzeichen mit 1 bis r nummeriert.

Ein Ausgang der Kennzeichnung lässt sich beschreiben

durch das n-tupel

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \ ,$$

wobei a_i das Kennzeichen des i-ten Individuums bezeichnet

$(1 \leq a_i \leq r)$.

Die Menge der möglichen Ausgänge der Kennzeichnung ist

$$S := \{1, \ldots, r\}^n \ ,$$

die Menge aller n-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{1, \ldots, r\}$.

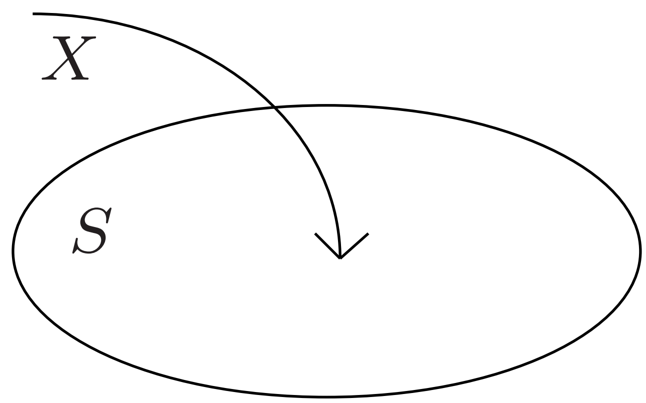
Manchmal schreiben wir dafür auch

$$S := \{1, \ldots, r\}^{\{1,\ldots,n\}},$$

die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, r\}$.

Den zufälligen Ausgang der Kennzeichnung

beschreiben wir durch eine *Zufallsvariable* X.



X kommt durch zufällige Wahl

eines Elementes aus S zustande.

Die Menge S heißt *Zielbereich* der Zufallsvariable X.

Wie jedes Element $(a_1, \ldots, a_n)$ unserer Menge S

besteht auch die Zufallsvariable X aus n Komponenten:

$$X = (X_1, \ldots, X_n) .$$

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,

dass keine zwei Komponenten von X gleich sind.

Dieses Ereignis schreiben wir als

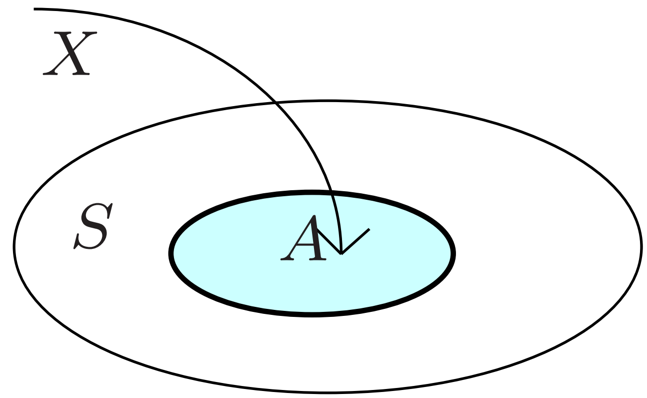
$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

oder auch als

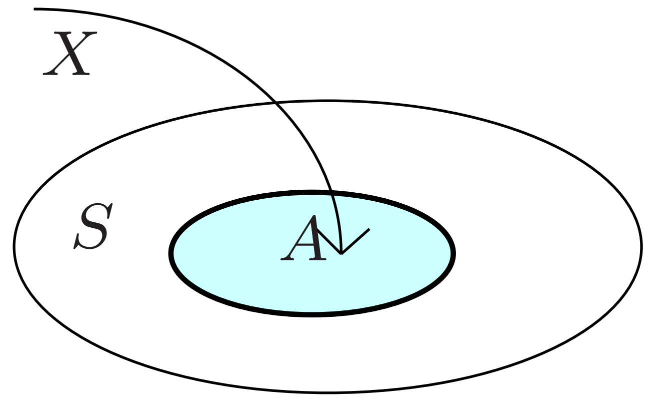
$$\{X \in A\}$$

mit der Teilmenge

$$A := \{a \in S \; : \; a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\} \; .$$



X
S
A



Wie kommt man zur **Wahrscheinlichkeit**

des Ereignisses $\{X \in A\}$?

Zur Erinnerung:

Wahrscheinlichkeiten gehören zu Ereignissen

und messen deren Chance einzutreten

mit einer Zahl zwischen 0 und 1:

$$\mathbf{P}(X \in A)$$

Zwei einleuchtende Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 \, .$$

d.h. das *sichere Ereignis* $\{X \in S\}$ hat Wahrscheinlichkeit 1

und (bei endlich vielen möglichen Ausgängen, d.h. $\#S < \infty$)

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a)$$

(Additivität.)

Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X \in A)$ berechnen zu können,

muss man eine Modellannahme treffen.

Unsere Modellannahme:

rein zufällige Wahl.

Damit ist gemeint, dass für je zwei $a, a' \in S$

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = a').$$

Das heißt: kein Ausgang ist bevorzugt.

Also:

$$P(X = a) = \frac{1}{\#S}, \quad a \in S\ .$$

Und

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}\ .$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der Mengen

$$S := \{1, \ldots, r\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

und

$$A := \{a \in S \; : \; a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#S = r^n$$

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

$$A := \{a \in S \ : \ a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

Für a_1 gibt es r mögliche Werte, für a_2 dann noch $r - 1$, usw.

Also:

$$\#A = r(r-1)\cdots(r-(n-1))$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{r^n}$$

$$= \frac{r-1}{r}\,\frac{r-2}{r}\cdots\frac{r-(n-1)}{r}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{r}\right).$$

Eine Formel aus der Mathe 1 (“AnaLinA”):

$$e^{-h} = 1 - h + o(h) \qquad \text{für } h \to 0.$$

Damit bekommen wir die “AnaLinA - Approximation:”

$$\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{i}{r}\Big) \approx \prod_{i=1}^{n-1} \exp\Big(-\frac{i}{r}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{r}\Big) = \exp\Big(-\frac{(n-1)n}{2r}\Big).$$

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\Big(-\frac{(n-1)n}{2r}\Big).$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{r^n}$$

$$= \frac{r}{r}\,\frac{r-1}{r}\,\frac{r-2}{r}\cdots\frac{r-(n-1)}{r}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r!}{r^n(r-n)!}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$,   lies: k-Fakultät

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\,\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Abraham de Moivre (1667-1754)

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\, \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\frac{r!}{r^n (r-n)!} \approx \sqrt{\frac{r}{r-n}}\, e^{-n} \Big(\frac{r}{r-n}\Big)^{r-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}}\, e^{-n} \Big(1 - \frac{n}{r}\Big)^{n-r}$$

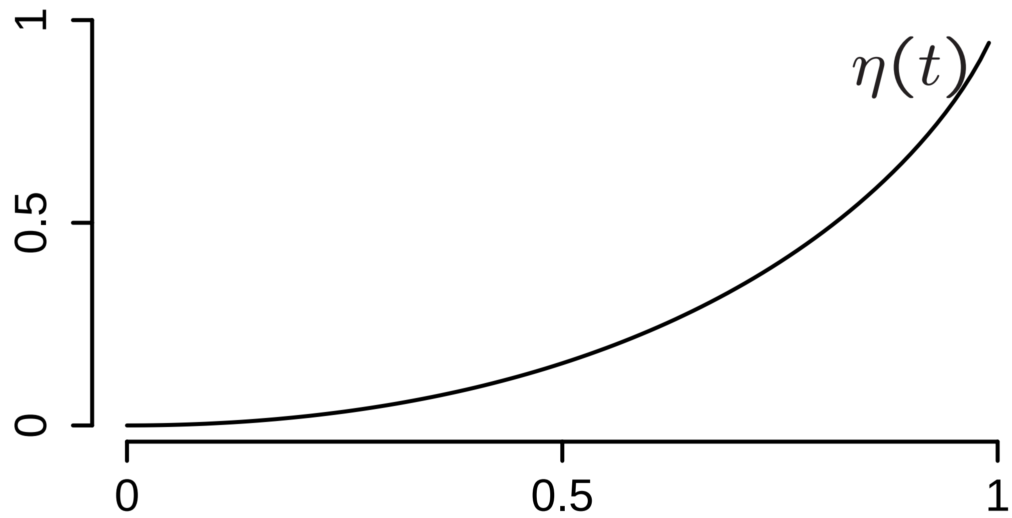
$$e^{-n}\left(1-\frac{n}{r}\right)^{n-r} = \exp\Big(-n + (n-r)\ln\big(1-\frac{n}{r}\big)\Big)$$

$$= \exp\Big(-r\,\big(\frac{n}{r} + \big(1-\frac{n}{r}\big)\ln\big(1-\frac{n}{r}\big)\big)\Big)$$

$$= \exp\Big(-r\,\eta\big(\frac{n}{r}\big)\Big)$$

mit $\quad \eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \leq t \leq 1.$

$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

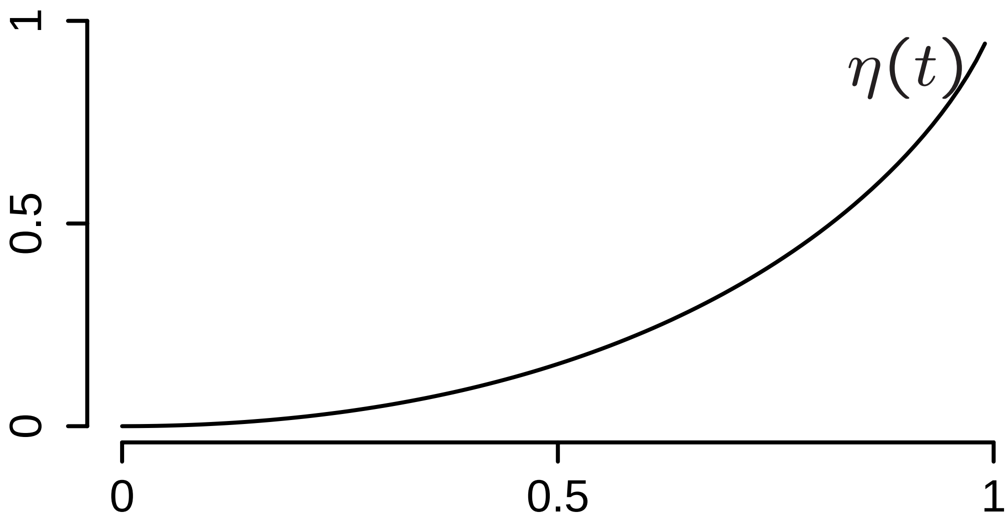


$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}} \exp\left(-r\,\eta\left(\frac{n}{r}\right)\right)$$

Für $n \ll r$, also $t := \frac{n}{r} \ll 1$,

können wir $\eta(t)$ quadratisch approximieren:

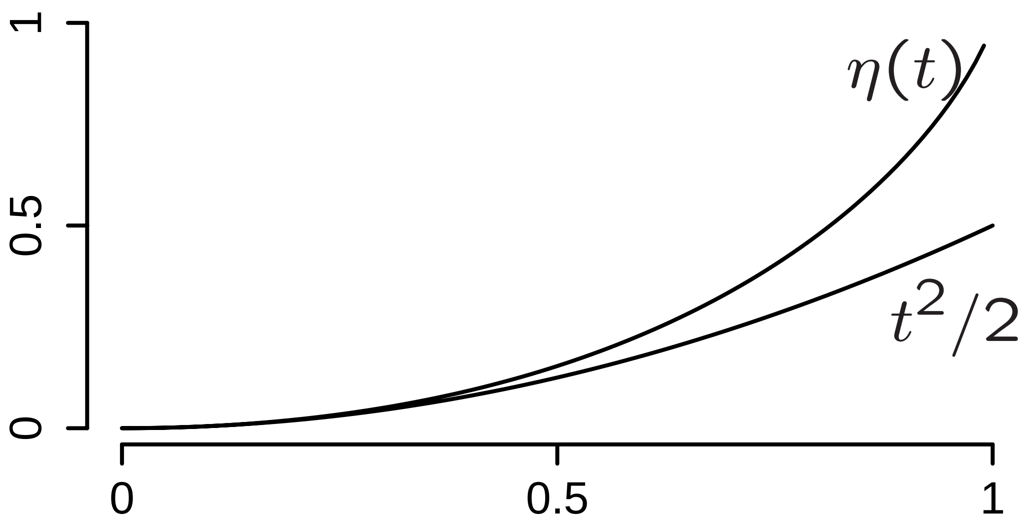
$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$



$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta''(0) = 1$$

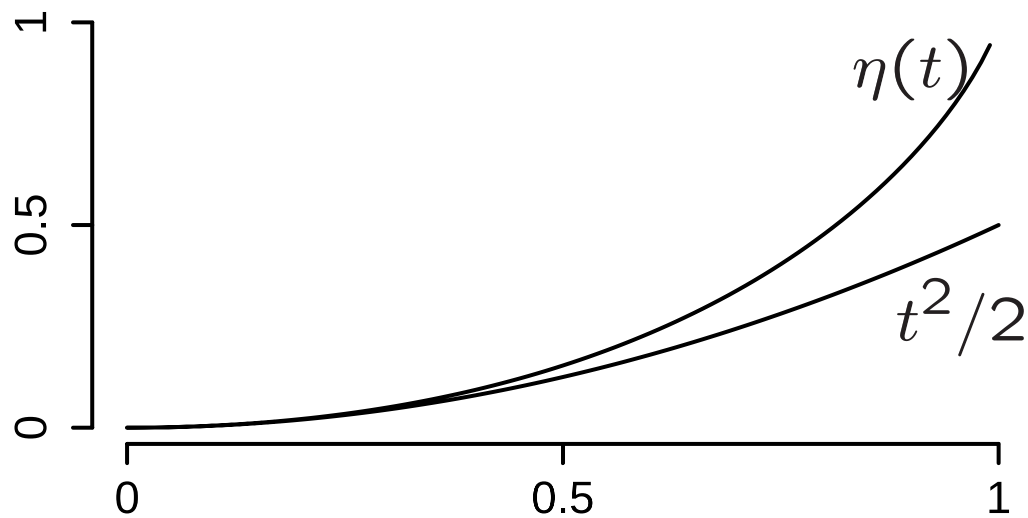
$$\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0, \quad \eta''(0) = 1$$



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

(Taylor-Entwicklung der Ordnung 2.)



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

Für $n \ll r$ (wie z. B. für $n = 25$, $r = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{r}\right) \approx \left(\frac{n}{r}\right)^2/2.$$

Fazit:

Für $n < r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}} \exp\left(-r\,\eta\left(\dfrac{n}{r}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx \exp(\frac{n}{2r}) \exp\left(-\frac{n^2}{2r}\right)$

$$= \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right)$$

(Stirling+Taylor-Approximation)

Für $n^2 \ll r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx 1.$

Man beachte:

Die Stirling+Taylor Approximation

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right)$$

ist identisch mit der “AnaLinA-Approximation”.

Beispiel: $n = 25, r = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{r^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}}\,\mathrm{exp}\left(-r\,\eta\Big(\frac{n}{r}\Big)\right) = 0.431308$$

$$\mathrm{exp}\Big(-\frac{n(n-1)}{2r}\Big) = 0.4396$$

Ein dynamisches Bild:

Der Zeitpunkt der ersten Kollision.

Wir denken uns r fest und lassen n laufen $(n = 1, 2, ..)$

Vorstellung: Ein Individuum nach dem anderen wird auf einen (immer wieder neu) rein zufällig gewählten Platz gesetzt.

Die Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ der gewählten Plätze ist dann eine rein zufällige $1 \ldots r$-Folge

$A_n :=$ „ keine Kollision bis (einschließlich) n "

T:= Zeitpunkt der ersten Kollision

(ist ablesbar aus $(X_1, X_2, \ldots)$. Es gilt

$$A_n = \{T > n\}$$

also insbesondere auch

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(T > n).$$

Wir haben somit AUCH die Verteilung der Zufallsvariablen T

(sowohl exakt als auch näherungsweise) berechnet.

Die Ferebee-Wandtner'schen Programme zur VL 1b (siehe Homepage)

geben dazu eine erhellende Illustration.