Stochastik für die Informatik

Wintersemester 2015/16

Anton Wakolbinger

StofI-Webseite:

http://ismi.math.uni-
frankfurt.de/wakolbinger/teaching/StofI1516/

Oder:

http://www.uni-frankfurt.de/53215133

Oder:

google $\rightarrow$ “Wakolbinger”

Übungsgruppen zur Stochastik für die Informatik,
WS 2015/16

Gruppe	Zeit	Ort		Tutorin/Tutor
1	Di 12-14	Raum 903	RM10	Sebastian Groß
2	Mi 10-12	Raum 901,	RM10	Jasmin Straub
3	Mi 12-14	Raum 711 kl	RM10	Elias Polak
4	Do 10-12	Raum 903	RM10	Anna Kremer
5	Do 14-16	Hörsaal H15	Gräfstr.	Hung The Tran
6	Fr 10-12	Raum 711 kl	RM10	Stefan Michel
7	Fr 14-16	Raum 711 kl	RM10	Theresa Kumpitsch

Anmeldung zu einer Übungsgruppe:

elektronisch über die StofI - Webseite

bis Sonntag 18. Oktober 2015, 24 Uhr

nach dem first come - first serve Prinzip

Freitags: Ausgabe des Übungsblatts.

Tipps zu den Übungsaufgaben:

in den Tutorien   (ab nächster Woche)

Termin für die Abgabe der schriftlichen Lösungen der "S-Aufgaben":

am Dienstag (11 Tage nach Ausgabe des Blattes)

In der Woche der Abgabe

werden die Lösungen in den Tutorien besprochen.

Bonuspunkte (maximal 12):

durch aktive Beteiligung in den Tutorien.

Bonuspunkte bekommt man nur, wenn man
mindestes zweimal im Semester
Lösungen von Übungsaufgaben (oder Teile davon)
im Tutorium vorstellt.

Abschlussklausur:

Dienstag, 23. Februar 2016, 10:15-11:45 Uhr.

Dabei können 100 Klausurpunkte erreicht werden.

Die Note errechnet sich aus

der Summe der Anzahl der erreichten Klausurpunkte

plus der Anzahl der erreichten Bonuspunkte.

Beträgt diese Summe mindestens 50,

gilt die Abschlussprüfung über die Veranstaltung

als bestanden.

Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger

Elementare Stochastik, Birkhäuser, 2. Aufl. 2010,

Preis: 18,90 EUR

Semesterausleihe möglich aus der

Bibliothek des Mathematischen Seminars,

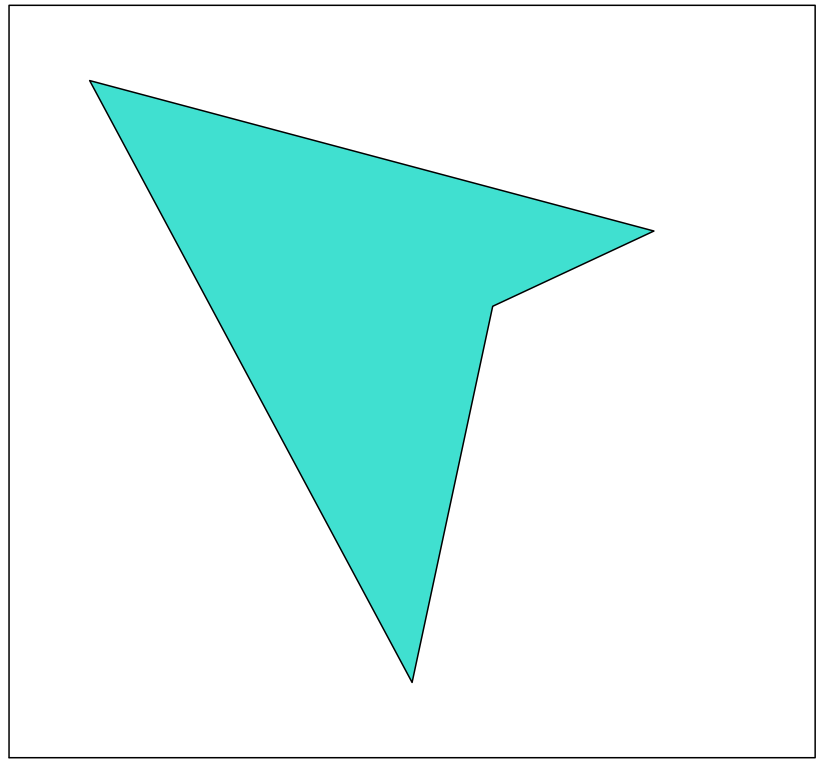
Robert-Mayer-Str. 8, 4. Stock

in der UB als E-Book vorhanden

Vorlesung 1a

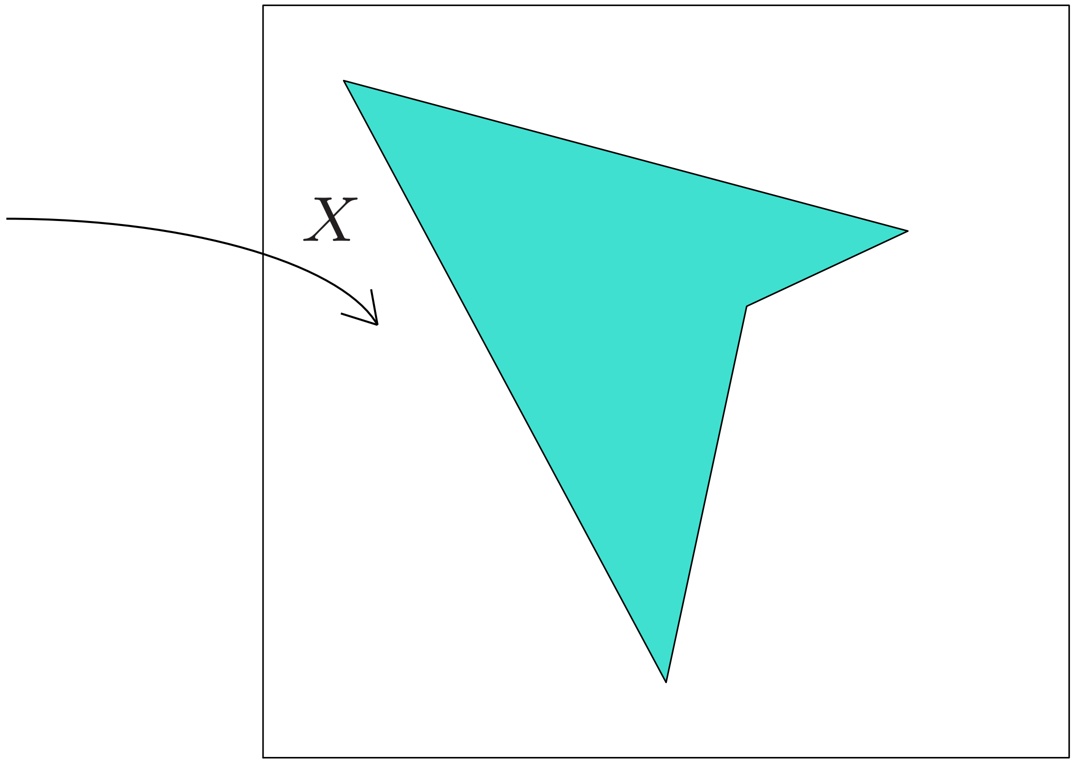
Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariable, Verteilungen:

Ein Beispiel



Wie groß ist der Anteil der blauen Fläche

an der Fläche des Quadrats?



Wie wahrscheinlich ist es, dass die

rein zufällige Auswahl eines Punktes aus dem Quadrat

in die blaue Fläche trifft?

Angenommen wir haben ein Werkzeug, mit dem man einen **rein zufälligen Punkt** aus dem Quadrat wählen kann

– und das nicht nur einmal, sondern “immer wieder neu”.

Was heißt

X ist rein zufälliger Punkt im Quadrat S

?

Die diskrete Sicht:

S ist eine endliche Menge von Pixeln.

Die kontinuierliche Sicht:

S ist eine kontinuierliche Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Die diskrete Sicht:

X ist *rein zufälliger Punkt aus dem Quadrat* S

bedeutet:

Für jede Teilmenge A von S ist

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\text{Anzahl der Pixel in } A}{\text{Anzahl der Pixel in } S}$$

lies:

die Wahrscheinlichkeit, dass X in A fällt

ist der Anteil der Menge A an der Menge S.

$\mathbf{P}$ steht für **probabilitas** (= Wahrscheinlichkeit)

Die kontinuierliche Sicht:

X ist *rein zufälliger Punkt aus dem Quadrat* S

bedeutet:

Für jede "messbare" Teilmenge A von S ist

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\text{Fläche von } A}{\text{Fläche von } S}$$

lies:

die Wahrscheinlichkeit, dass X in A fällt

ist der Anteil der Fläche von A an der Fläche von S.

Wir bekommen mit unserem Werkzeug

nicht nur *einen einzigen* rein zufälligen Punkt,

sondern sogar beliebig viele,

genauer:

eine *rein zufällige Folge* $(X_1, X_2, \ldots..)$

von Punkten in S.

Sei $A \subset S$.

$$Z_i := \mathbf{1}_A(X_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

zählt, ob X_i in A fällt.

Dabei ist

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in A \\ 0 \text{ für } x \in S \setminus A \end{cases}$$

Z_i ist der *der Indikator* (*"der Zähler"*)

des Ereignisses "X_i fällt in A".

Alternative Schreibweise: $\quad I_{\{X_i \in A\}}$

Die zufällige Zahl

$$M := \frac{1}{100}(Z_1 + \cdots + Z_{100})$$

ist ein *Schätzer* für die Wahrscheinlichkeit

$$p := \mathbf{P}(X \in A)$$

(und damit für den gefragten Flächenanteil).

Übrigens: Der Anteil der blauen Fläche am Quadrat

(den man in der Realität ja nicht kennt) ist in unserem Beispiel

$$p = 0.195$$

$$M := \frac{1}{100}(Z_1 + \cdots + Z_{100})$$

$$p = 0.195$$

Damit hat M gar keine Chance, exakt auf p zu fallen, denn

der *Wertebereich* von M

(d.h. die Menge der möglichen Ausgänge) ist

$$S' := \left\{ \frac{0}{100}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{100} \right\}$$

Ein Ergebnis ("eine Realisierung") von $(X_1, \ldots, X_{100})$

liefert eine Realisierung von $(Z_1, \ldots, Z_{100})$

und damit eine Realisierung von M

(einen Schätzwert für p).

Wie "zuverlässig" ist dieser Schätzwert?

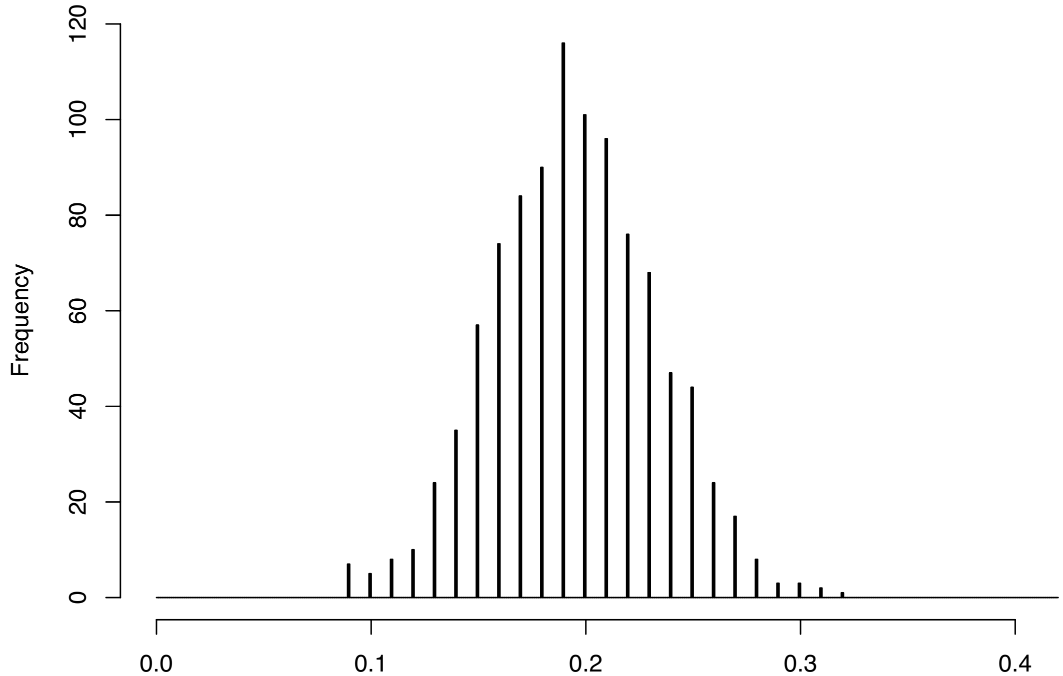
Davon machen wir uns ein Bild, indem wir viele (z.B. 1000) “unabhängige Kopien” von M erzeugten und in einem *Histogramm* darstellen, wie oft welche Ausgänge realisert wurden.

So bekommen wir eine näherungsweise Darstellung der Verteilung von M.

Die Verteilung von M ist bestimmt durch ihre Gewichte

$$\rho(b) := \mathbf{P}(M = b), \quad b \in S'.$$

Verteilung von M (Näherung aus 1000 Wiederholungen):



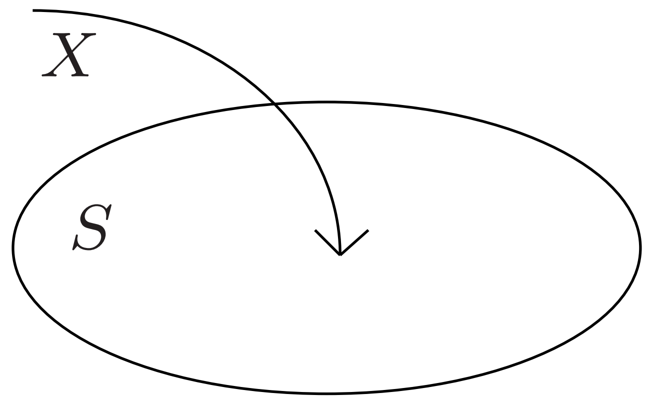
Die 101 möglichen Ausgänge von M

sind (bei weitem) nicht gleich wahrscheinlich:

die Verteilung von M “ist um p konzentriert”.

Zusammenfassung
der wichtigsten Begriffe
der ersten Stunde:

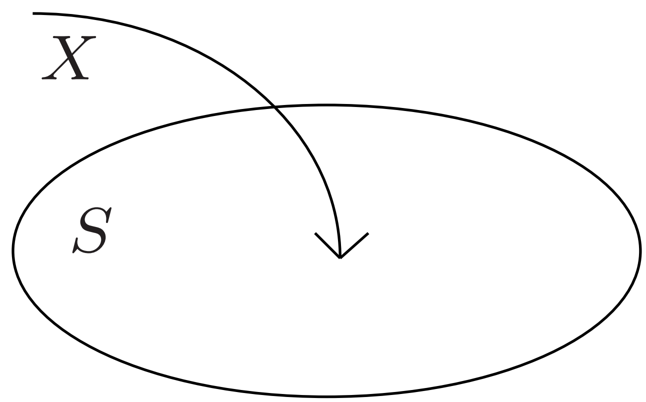
Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... zufällige Wahl eines Elements aus S

S ... Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:

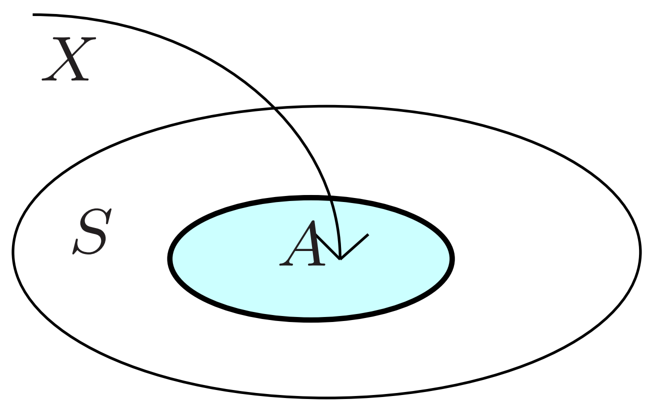


X . . . **Zufallsvariable**

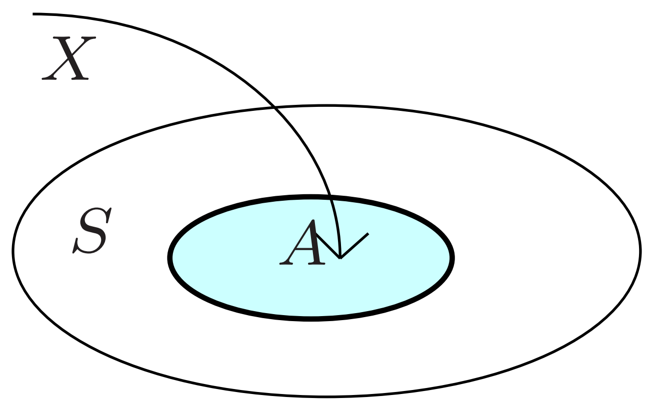
mit *Zielbereich (Wertebereich)* S

Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “X fällt in A”



Dabei ist A eine bestimmte Teilmenge von S.



Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

“X fällt in A”.

“X ist *rein zufällig*”

heißt im Fall einer *endlichen* Menge S:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “X fällt in A”:

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ scheiben wir kurz:

$$\mathbf{P}(X \in A).$$

“X ist *rein zufällig*”

heißt im Fall einer *kontinuierlichen* Menge $S \subset \mathbb{R}^d$:

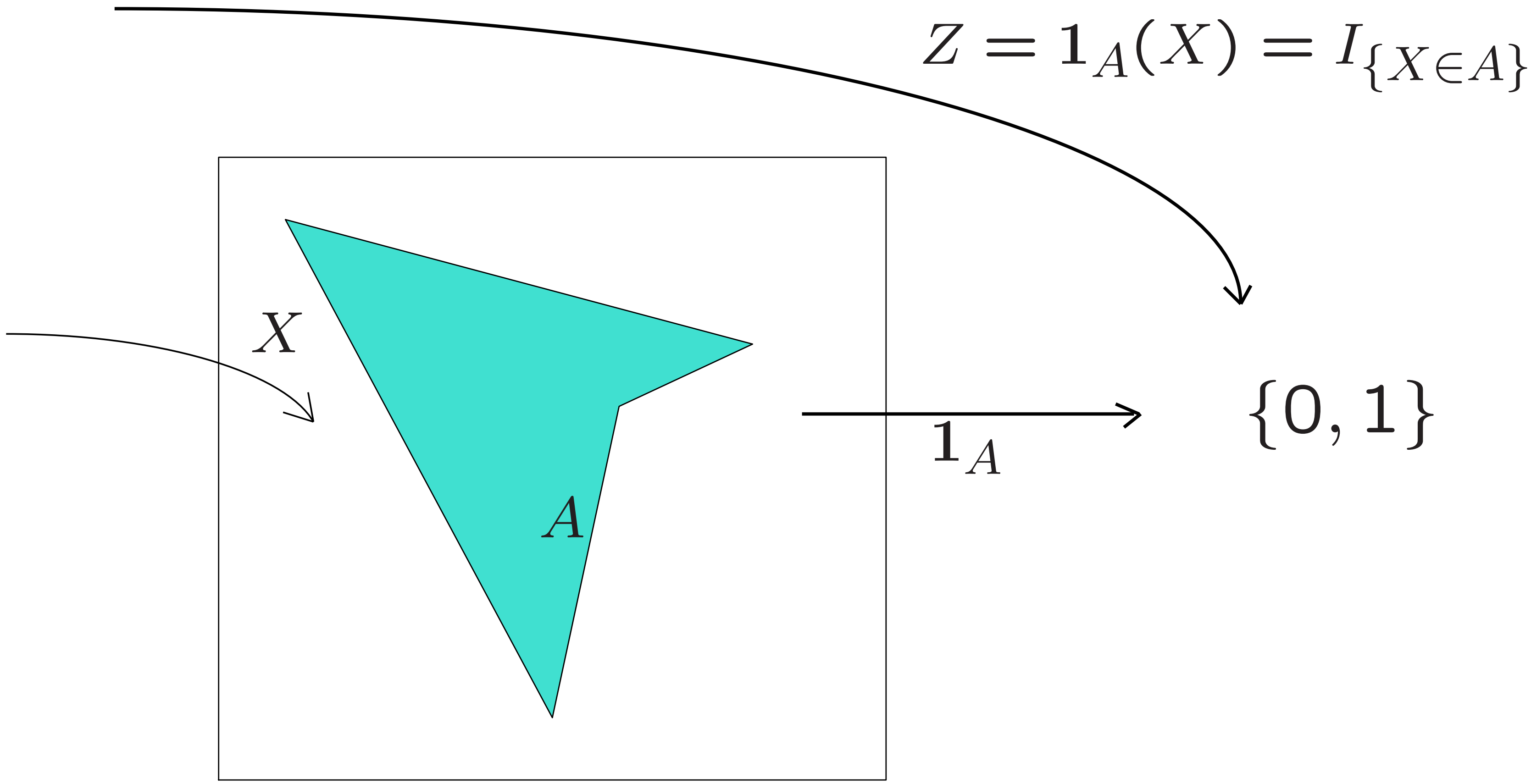
jede (messbare) Teilmenge A von S

kommt mit einer W’kt zum Zug,

die dem relativen Anteil ihres Volumens

am Volumen von S entspricht:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\text{Volumen von } A}{\text{Volumen von } S}$$



Die Ereignisse $\{X \in A\}$ und $\{Z = 1\}$ stimmen überein!