Vorlesung 12a

Markovketten

Teil 2

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \ldots)$

mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n).$$

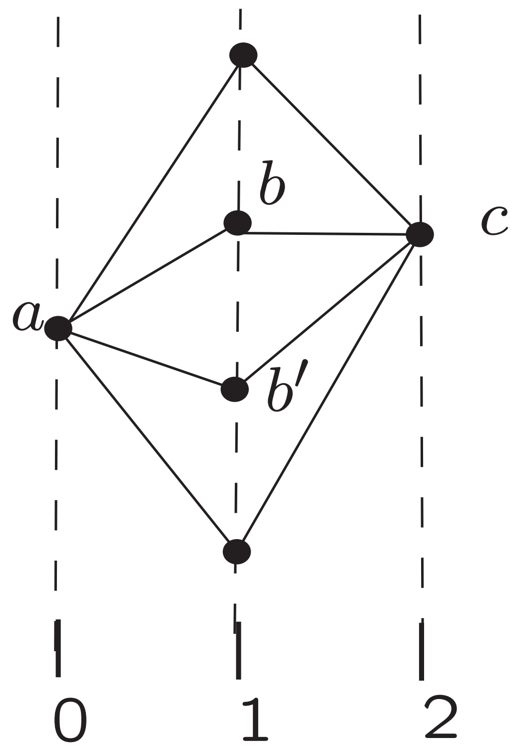
Speziell für $n = 2$:

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$

Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

“Zerlegung von zwei Schritten nach dem ersten Schritt”



Und jetzt für n statt 2:

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\ .$$

Eben haben wir die Kette in Gedanken laufen lassen

bis zu einem festen Zeitpunkt n.

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie

erstmals eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von

Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P.

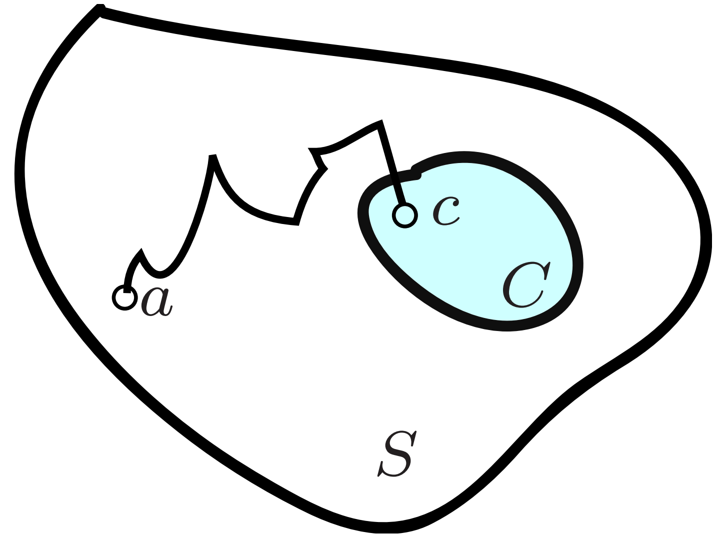
$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass der in $a \in S$ startende Pfad

die Menge C erstmals

im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

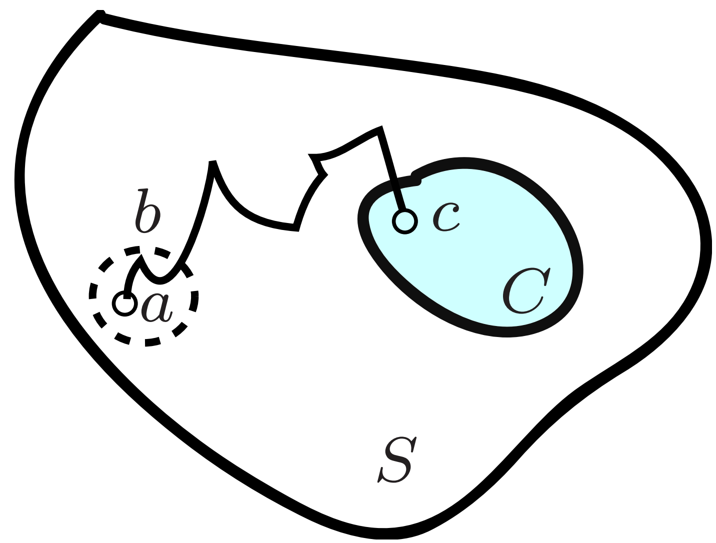
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a),\ a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

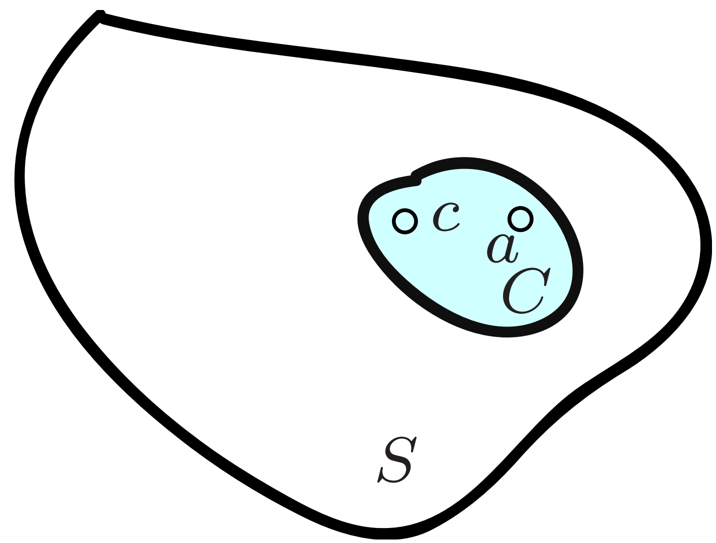
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a),\ a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$w(a) = \delta_{ac} \quad$ für $a \in C$.



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

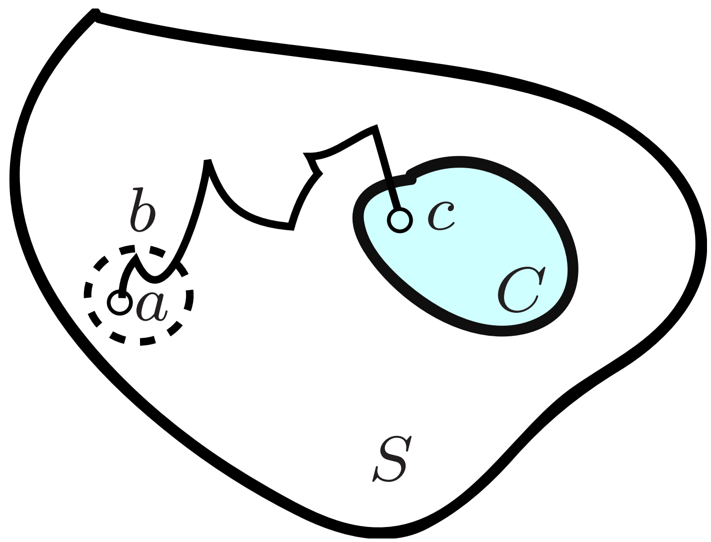
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a),\ a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



Das Stichwort ist: Zerlegung

nach dem ersten Schritt.

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$w(a) = \beta a + \gamma$ mit $\gamma = 0, \beta = 1/c$.

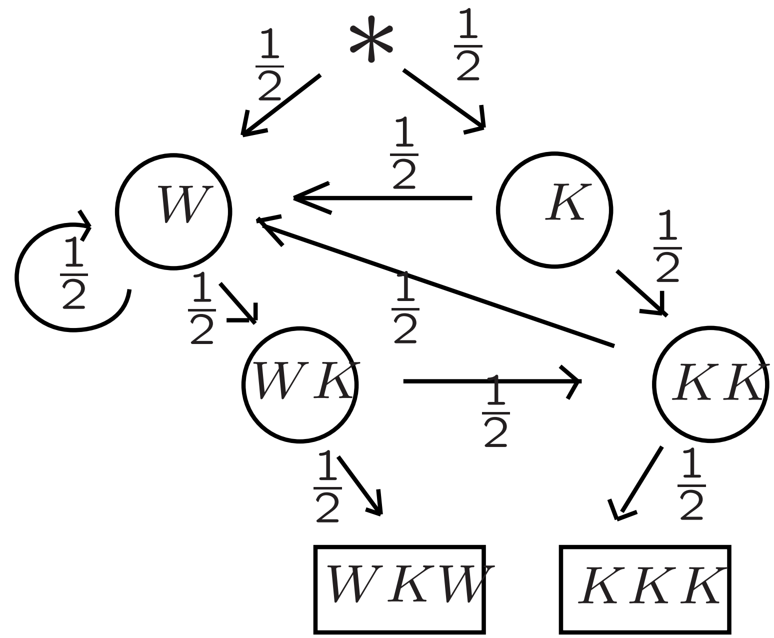
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW?

Hier ist ein "reduzierter Graph" der relevanten Zustände und Übergänge:

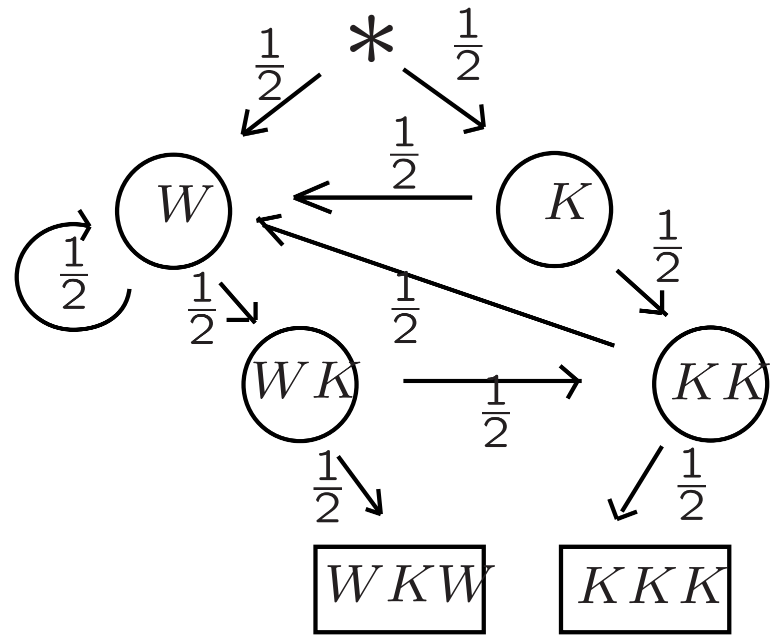


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(WK) = \tfrac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \tfrac{1}{2}w(KK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(W) = \tfrac{1}{2}w(WK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,.$$

und daraus

$$w(W) = \tfrac{1}{3}, w(K) = \tfrac{1}{2}, \;\; w(*) = \tfrac{1}{2}w(W) + \tfrac{1}{2}w(K) = \tfrac{5}{12}\,.$$

Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S

und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist

$$T_C := \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

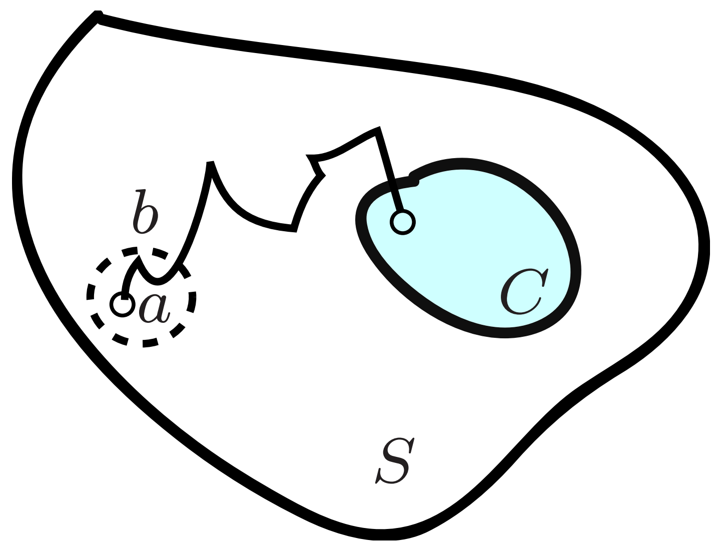
die erste Treffzeit von C.

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann “Neustart” in b:

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_C]$$

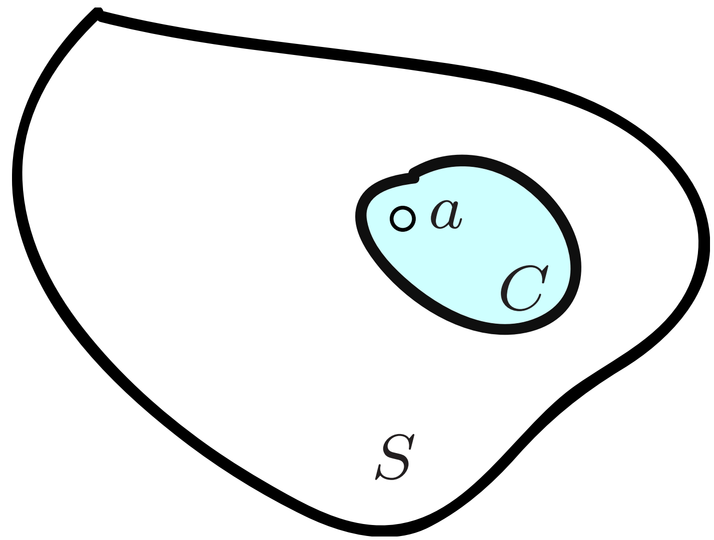
(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106.)

Und für $a \in C$

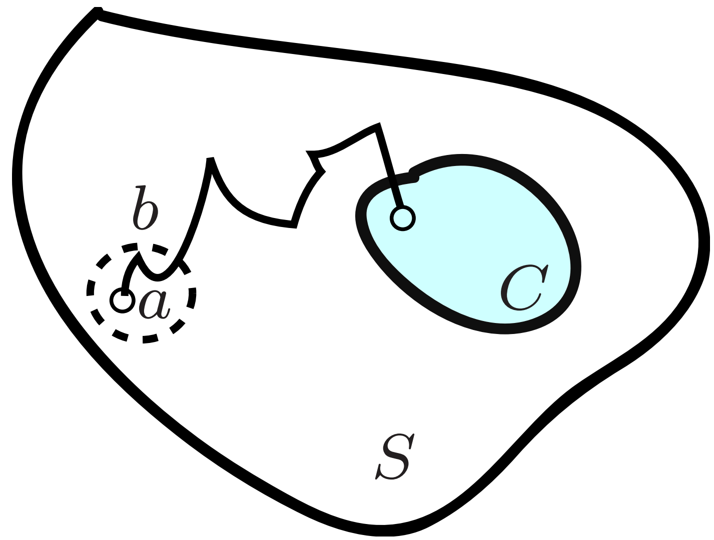
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



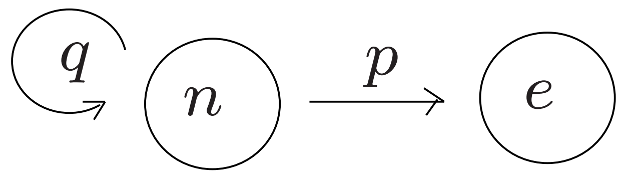
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\mathbf{e}(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$\mathbf{e}(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1 + q\mathbf{E}_n[T_e] + p\mathbf{E}_e[T_e] \ .$$

Wegen $\mathbf{E}_e[T_e] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1/p.$$