Vorlesung 10a

Bedingte Erwartung

Zur Erinnerung:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$.

$$\mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big] := \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

nennen wir den

bedingten Erwartungswert von $g(X_1, X_2)$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

Der Erwartungswert $\mathbf{E}[g(X_1, X_2)]$

lässt sich nach den Ausgängen von X_1 zerlegen:

$$\mathbf{E}\big[g(X_1, X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{E}_{a_1}\big[g(a_1, X_2)\big]$$

$$= \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_{X_1}[g(X_1, X_2)]\big].$$

“Zerlegung des Erwartungswertes nach der ersten Stufe”

Merke: Der bedingte Erwartungswert

$$\mathbf{E}_{a_1}\left[g(X_1, X_2)\right]$$

ist eine Zahl.

$$\mathbf{E}_{X_1}\left[g(X_1, X_2)\right]$$

ist eine Zufallsvariable.

Wir sprechen von der

bedingten Erwartung von $g(X_1, X_2)$ gegeben X_1.

Ist X_2 reellwertig (also $S_2 \subset \mathbb{R}$),

dann ergibt sich speziell mit $g(a_1, a_2) := a_2$

für den bedingten Erwartungswert von X_2,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}_{a_1}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \,,$$

Für die Zerlegung des Erwartungswertes von X_2 nach X_1

ergibt sich (wie auch schon am Ende von VL 9b festgestellt)

die einprägsame Formel

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]] = \mathbf{E}[X_2] \,.$$

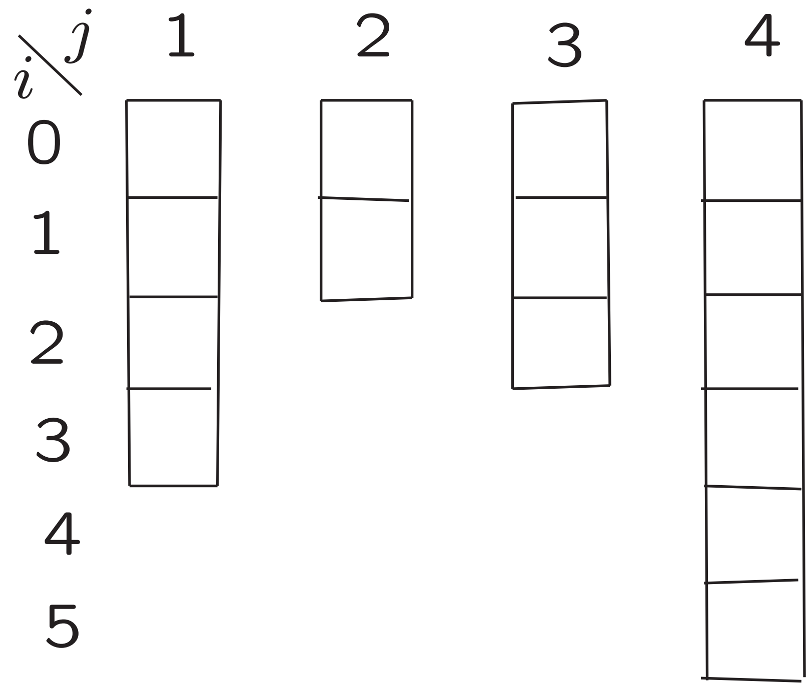
Beispiel: Suchen in Listen.

n Namen werden in r Listen einsortiert. Dadurch ergibt sich eine Besetzung $k = (k_1, \ldots, k_r)$.

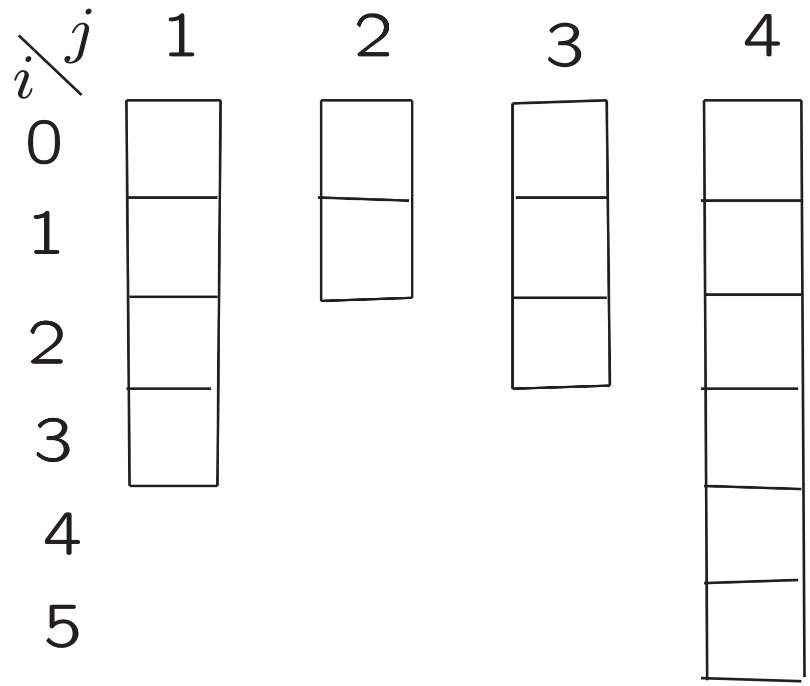
Jeder Name steht in seiner Liste Nr. j an einer der Stellen $i = 0, \ldots, k_j - 1$.

Vorstellung: Die Listennummer entspricht dem Anfangsbuchstaben des Namens.

Für ein Alphabet mit $r = 4$ Buchstaben (und bei $n = 15$ Namen) ist *eine* mögliche Besetzung:

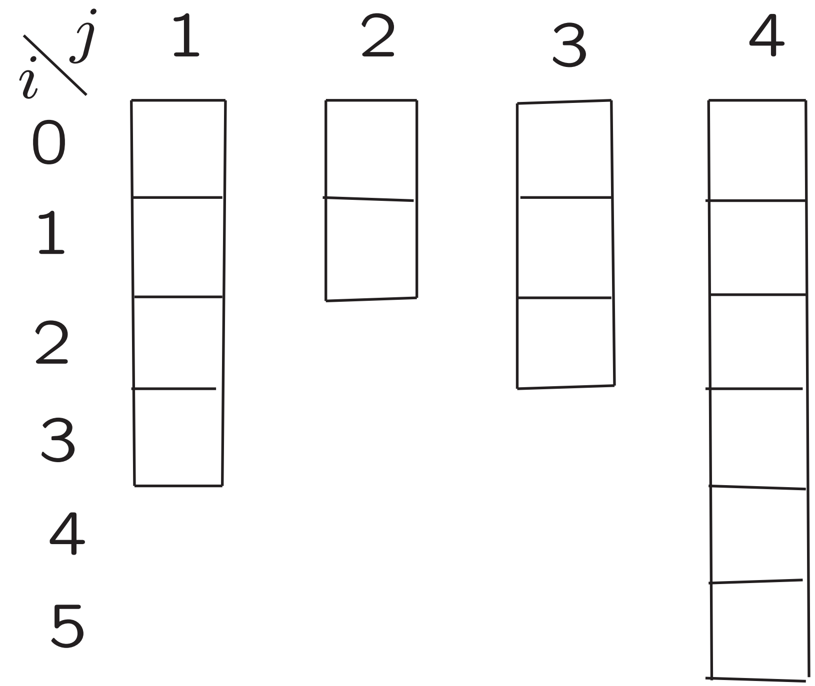


$i \backslash j$
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5



$$n = 15,\ r = 4$$

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4) = (4, 2, 3, 6)$$

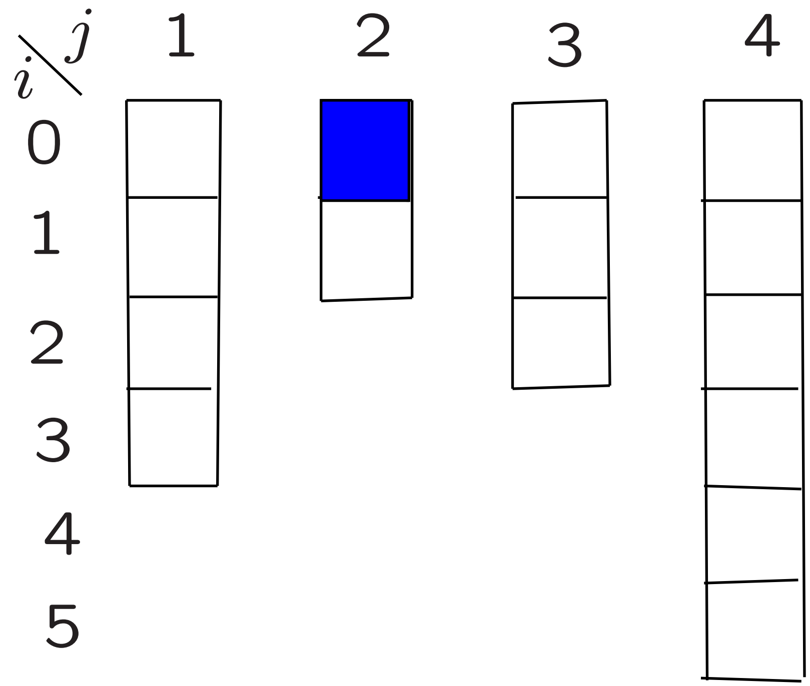


Erste Frage: Was ist für gegebene Besetzung k

der Erwartungswert der Stellennummer M

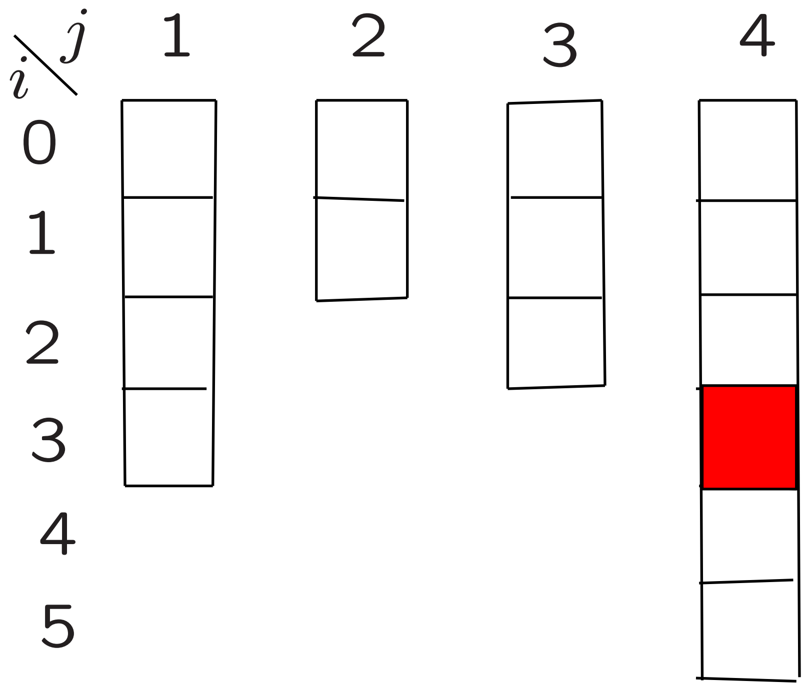
(der “Suchtiefe”)

eines rein zufällig aus den n herausgegriffenen Names?



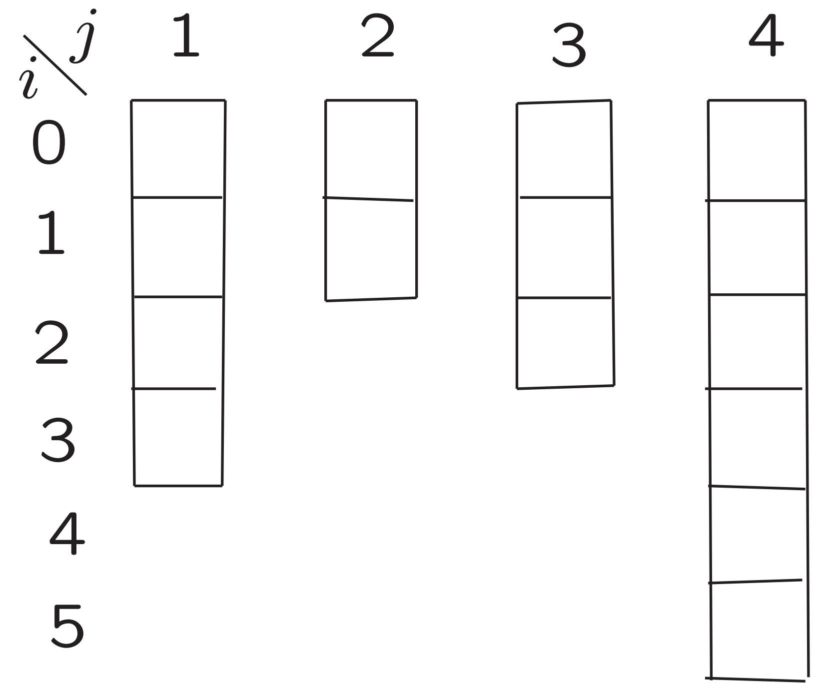
Liste $j = 2$,

Tiefe $i = 0$.



Liste $j = 4$,

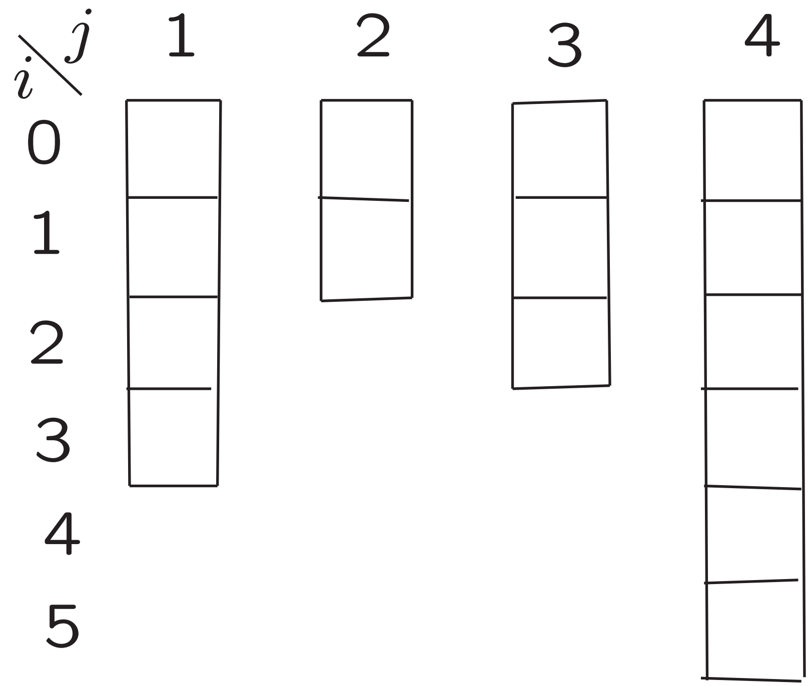
Tiefe $i = 3$.



Was ist *bei gegebenem* k

der Erwartungswert der Suchtiefe M

eines rein zufällig aus den n herausgegriffenen Names?



Die Antwort ist

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{k_j - 1} i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j - 1)}{2} \, .$$

Wir betrachten jetzt ein

stochastisches Modell für die erste Stufe:

Annahme:

Die zufällige Besetzung $Z = (Z_1, \ldots, Z_r)$

kommt durch n-maliges Würfeln

mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_r$ zustande.

Z ist multinomial (n, $p_1, \ldots, p_r$)-verteilt.

(Vorstellung: Die n Namen

sind eine Stichprobe aus einer großen Population

mit bekannter Verteilung der Anfangsbuchstaben.)

Aus den n Namen wird rein zufällig einer herausgegriffen.

Es sei M die Stelle, die er in seiner Liste einnimmt.

Aufgabe: Berechne $\mathbf{E}[M]$.

(Dieser Erwartungswert beschreibt die mittlere Suchzeit

(Suchtiefe)

für einen aus den Listen zufällig gewählten Namen.)

Der Erwartungswert von M, gegeben $Z = k$, war

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j - 1)}{2} \; .$$

Mit der oben hergeleitetet Zerlegung des Erwartungswertes

$$\mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_Z[M]\big]$$

erhalten wir

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j - 1)}{2}\Big] \; .$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j-1)}{2}\Big]$$

Nach Annahme ist Z_j Binomial(n, p_j)-verteilt.

Mit der Formel $\mathbf{Var} Z = \mathbf{E}[Z^2] - (\mathbf{E}[Z])^2$ folgt

$$\mathbf{E}[Z_j(Z_j-1)] = np_j(1-p_j) + (np_j)^2 - np_j = p_j^2\, n(n-1),$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2r}\ .$$

Eine Modifikation des vorigen Beispiels:

Sei Z wieder multinomial $(n,\, p_1, \ldots, p_r)$-verteilt,

J sei unabhängig von Z, mit $\mathbf{P}(J = j) = p_j, \quad j = 1, \ldots, r$.

Berechne den Erwartungswert von $X := Z_J$.

(Dieser Erwartungswert beschreibt die mittlere Suchzeit

nach einem in den Listen nicht vorhandenen Namen)

Wir zerlegen $\mathbf{E}[X]$ nach den Ausgängen von Z:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_Z[X]] = \sum_k \mathbf{P}(Z = k)\, \mathbf{E}_k[X]$$

$$= \sum_k \mathbf{P}(Z = k) \sum_{j=1}^{r} p_j k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j \sum_k \mathbf{P}(Z = k) k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j\, \mathbf{E} Z_j = \sum_{j=1}^{r} p_j\, n p_j = n \sum_{j=1}^{r} p_j^2 .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \frac{n}{r}.$$

Im Vergleich dazu war (siehe voriges Besipiel)

die mittlere Suchtiefe eines rein zufällig aus den n

herausgegriffenen Namens

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2r}.$$