# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 17. Juni 2016, zu Beginn der Vorlesung

**33.** Es sei $W$ eine $C[0,\infty)$-wertige Zufallsvariable mit $W(0)=0$ und so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle dyadischen Zahlen $0 \le t_0 < t_1 < \cdots t_k$ gilt: Die Zuwächse $\Delta W(t_{i-1}, t_i)$ sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t_i - t_{i-1}$. Zeigen Sie, dass dann $(W(t))_{t\ge 0}$ eine standard Brownsche Bewegung ist. *Sie dürfen dabei verwenden, dass es wegen des Eindeutigkeitssatzes für Maße ausreicht zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ und alle stetigen, beschränkten Funktionen $g_1, \dots, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeweils außerhalb eines bestimmten kompakten Intervalls verschwinden, gilt:*

$$(*) \quad \mathbf{E}[g_1(\Delta W(t_0,t_1)) \cdots g_k(\Delta W(t_{k-1},t_k))] = \mathbf{E}[g_1(Y_1)\cdots g_k(Y_k)]$$

*wobei die $Y_i$ unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t_i - t_{i-1}$ sind.*

**34.** ***Brownsche Bewegung und Wärmeleitungsgleichung.*** a) Zeigen Sie, dass $p(t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}$ die *Wärmeleitungsgleichung* löst:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t;x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t;x,y).$$

b) Unter $\mathbf{P}_x$ sei $W$ eine Brownsche Bewegung mit Varianzparameter 1 und Start in $x$. Berechnen Sie jeweils für $f(y)=y$, $f(y)=y^2$ und $f(y)=e^y$ die Funktion $u(t,x) = \mathbf{E}_x[f(W_t)]$, und prüfen Sie nach, dass in allen drei Fällen $u$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

löst.

**35.** Sei $W$ sBB, $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s, s \le t)$ und $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$.
Welche der folgenden Ereignisse gehören zu $\mathcal{F}_{0+}$?
(i) $\{W_t > \sqrt{t}$ für unendlich viele $t\}$,
(ii) $\{W_{\frac{1}{n^2}} > \frac{1}{n}$ für unendlich viele $n\}$,
(iii) $\{W_{t_n} > \sqrt{t_n}$ für eine (von $W$ abhängende) Folge $t_n \downarrow 0\}$.

*Bei (i) dürfen Sie voraussetzen, dass für kein $f \in C[0,1]$ das Ereignis $\{W = f\}$ unmöglich ist.*[1] *Überlegen Sie, ob es unter dieser Zusatzbedingung sein kann, dass sich die Menge $B := \{f \in C[0,\infty) \,|\, f(t) > \sqrt{t}$ für unendlich viele $t\}$ schreiben lässt als $\{f \in C[0,\infty) \,|\, (f(t))_{0\le t\le 1} \in \tilde{B}\}$ mit passendem messbarem $\tilde{B} \subset C[0,1]$.*

**36.** Sei $W$ eine sBB und $T := \inf\{t > 0 : |W_t| > \sqrt{t}\}$. Zeigen Sie $T = 0$ f.s. *Hinweis: Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ereignisse $E_n := \{|W_{1/2^n} - W_{1/2^{n+1}}| > 2 \cdot 2^{-n/2}\}$ unendlich oft eintreten. Sie dürfen dabei das zweite Borel-Cantelli Lemma verwenden, siehe z. B. [KeWa] Elementare Stochastik, S. 84.*

---

[1] Z. B. ist diese Bedingung für das sogenannte *kanonische Modell* erfüllt, in dem $(\Omega, \mathcal{F})$ als $(C[0,\infty), \mathcal{B}_{C[0,\infty)})$ und $W$ als die identische Abbildung auf $C[0,\infty)$ gewählt wird.