Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 10. Juni 2016, zu Beginn der Vorlesung

29. Seien $p_a = P_{a,a+1}$ und $q_a = P_{a,a-1}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Geburts- und Todesprozesses auf $\mathbb{N}_0$. Wie im Buch und in der Vorlesung setzen wir voraus, dass alle $p_a > 0$ sind, mit $q_0 = 0$. Bestimmen Sie ein invariantes Maß μ. Wann existiert eine invariante Verteilung? *Hinweis: Die Eigenschaft der Reversibilität ergibt auch für invariante Maße Sinn und ist hier hilfreich. Betrachten Sie erst den Fall, dass $q_a > 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$, und dann den Fall, dass ein $a \in \mathbb{N}$ existiert mit $q_a = 0$. Warum ist dann $\mu_x = 0$ für alle $x < a$?*

30. Zeigen Sie:
(i) Eine nichtnegative superharmonische Funktion h nimmt auf einer rekurrenten Klasse C einen konstanten Wert an.
(ii) Für einen transienten Zustand b ist

$$h(a) = \mathbf{P}_a(X_n = b \text{ für ein } n \geq 0)$$

eine nichtnegative (auf dem Zustandsraum $\mathbb{S}$) superharmonische Funktion, die nicht konstant ist.

31. X sei die gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$, P sei ihre Übergangsmatrix. Die erste Treffzeit des Ursprungs $0 \in \mathbb{Z}^3$ bezeichen wir mit $T := \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Für $x \in \mathbb{Z}^3$ setzen wir $h(x) := \mathbf{P}_x(T < \infty)$.
i) Überprüfen Sie die Gültigkeit der folgende Aussage: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^3$ mit $a_0, \dots, a_{n-1} \neq 0$ ist

$$\mathbf{P}_{a_0}(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n \,|\, T < \infty) = \frac{1}{h(a_0)} P_{a_0 a_1} \cdots P_{a_{n-1} a_n} h(a_n).$$

ii) Zeigen Sie: Unter der bedingten Verteilung $\mathbf{P}_{a_0}(\,\cdot\,|\, T < \infty)$ ist $(X_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ eine Markovkette, und drücken Sie deren Übergangsmatrix Q durch P und h aus.

32. Wir betrachten eine Erneuerungskette $X = (X_n)_{n\geq 0} = (L_n, R_n)_{n \geq 0}$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ mit Lebensdauerverteilung

$$\mathbf{P}(Z = 1) = 6/11, \mathbf{P}(Z = 2) = 3/11, \mathbf{P}(Z = 3) = 2/11.$$

i) Skizzieren Sie die Menge $\mathbb{S}^{\mathrm{rec}}$ der rekurrenten Zustände von X.
ii) Finden Sie die Gleichgewichtsverteilung von X.
iii) Stimmt folgende Aussage: Für alle a_1, $a_2 \in \mathbb{S}^{\mathrm{rec}}$ exisitiert ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $\mathbf{P}_{a_1}(X_m = (0, 1)) > 0$ und $\mathbf{P}_{a_2}(X_m = (0, 1)) > 0$?
iv) Konvergiert X ins Gleichgewicht, und wenn ja, warum?
v) Für jeden Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ sei $T^{(n)}$ der Zeitpunkt der ersten Erneuerung nach n. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(T^{(n)} = n + r)$$

für $r = 1, 2$ und 3.