Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 3. Juni 2016, zu Beginn der Vorlesung

25. ***Ergodische Zerlegung.*** X sei eine Markovkette auf $\mathbb{S}$ mit Übergangsmatrix P, und $\mathbb{S}$ besitze zumindest einen positiv rekurrenten Zustand. $(C_j)_{j\in K}$ seien die positiv rekurrenten Klassen und für $j \in K$ sei $\pi^{(j)}$ die eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung mit $\pi^{(j)}(C_j) = 1$.
Zeigen Sie: Jede Gleichgewichtsverteilung besitzt eine eindeutige Darstellung als Konvexkombination

$$\pi = \sum_{j\in K} \alpha_j \pi^{(j)}.$$

26. ***Per Metropolis zur uniformen Verteilung.*** Wie muss man die Übergangswahrscheinlichkeiten bei einer gewöhnlichen Irrfahrt auf einem endlichen ungerichteten Graphen im Sinne des Metropolis-Algorithmus verändern, sodass sich als Gleichgewichtsverteilung die uniforme ergibt?

27. ***Ein Modell aus der Biologie.*** Jede Zelle eines Organismus enthalte r Partikel, einige vom Typ A, die anderen vom Typ B. Bei Zellteilung verdoppelt sich zunächst die Anzahl der Typ A- und Typ B-Partikel, eine Tochterzelle entsteht dann durch rein zufällige Auswahl von r dieser $2r$ Partikel. Wir betrachten eine Iteration dieses Vorgangs, und eine Nachkommenslinie von Zellen entlang der Generationen.

Zeigen Sie: Sind in einer Mutterzelle a Partikel vom Typ A, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der betrachteten Nachkommenslinie schließlich alle Partikel vom Typ A sind, gleich a/r.

28. ***Der Skilift.*** Sei Y eine (nicht f.s. konstante) Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Kopien von Y. Wir betrachten die Markovkette $X = (X_0, X_1, \ldots)$ mit X_0 unabhängig von den Y_i und rekursiv gegeben durch

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + Y_{n+1} \ .$$

Interpretation: An einen Skilift gelangen zwischen den Zeitpunkten, zu denen die n-te und $(n+1)$-te Person abtransportiert werden, Y_{n+1} neue Skifahrer. Dann ist X_n die Länge der Warteschlange, nachdem n Personen befördert worden sind.

(i) Geben Sie die Übergangsmatrix P mithilfe der Gewichte $p_a = \mathbf{P}(Y = a)$, $a \in \mathbb{N}_0$, an.

(ii) Zeigen Sie: 0 ist rekurrent, falls $\mathbf{E}[Y] \leq 1$.
Hinweis: Benutzen Sie ein geeignetes Supermartingal.

(iii) Zeigen Sie: 0 ist transient, falls $\mathbf{E}[Y] > 1$.
Hinweis: Es gilt $X_n \geq Y_1 + \cdots + Y_n - n$.