Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 27. Mai 2016, zu Beginn der Vorlesung

21. ***Bedingen auf die Zukunft.*** Sei X die gewöhnliche Irrfahrt auf $\{0,1,\dots,10\}$ gestoppt beim ersten Treffen der Menge $\{0,10\}$, und sei T die erste Treffzeit von $\{0,10\}$.

a) Wir starten X im Zustand 2. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass X seinen ersten Schritt zum Zustand 1 macht, bedingt unter $\{X_T = 10\}$?

b) Zeigen Sie, dass X bedingt unter dem Ereignis $\{X_T = 10\}$ wieder eine Markovkette ist, und berechnen Sie die Übergangsmatrix der bedingten Kette auf ihrem Zustandsraum $\{1,2,\dots,10\}$.

22. ***Wann kommen die Rekorde?*** Seien $U_1, U_2, \dots$ unabhängige, uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariable. Die Zeitpunkte eines neuen Rekordwertes unter den U_i nennen wir $X_0, X_1, \dots$. Dazu setzen wir $X_0 := 1$ und induktiv $X_{n+1} := \min\{i > X_n : U_i > U_1, \dots, U_{i-1}\}$.
(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(X_0, X_1, \dots)$ bzgl. ihrer natürlichen Filtration $\sigma(X_0, \dots, X_n)$, $n \geq 0$, eine Markovkette auf $\mathbb{N}$ ist, mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ab} = \frac{a}{b(b-1)}$ für $b > a$. *Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Es seien $R_1, \dots, R_a$ die (aufsteigenden) Ränge von $U_1, \dots, U_a$. Für $n < a$ und $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a$ sei G eine Teilmenge der Permutationen von $1, \dots, a-1$ so, dass*

$$\{X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a\} = \{R_a = a, (R_1, \dots, R_{a-1}) \in G\}.$$

Wir setzen $g := \#G$. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a)$ und zeigen Sie, dass

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = a, X_{n+1} = b) = \frac{\binom{b-2}{a-1}(b-2-(a-1))!g}{b!}.$$

(ii) Warum ist die Behauptung von (i) nicht mehr richtig, wenn man zu der Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(U_1, U_2, \dots, U_{X_n})$ übergeht? *Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{P}(X_1 = 2 | U_{X_0})$ und $\mathbf{P}(X_1 = 2 | X_0)$.*

23. ***Exkursionen.*** *Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt $(X_n) = (X_{1,n}, X_{2,n})$ auf $\mathbb{Z}^2$.*

(i) Was sind ihre invarianten Maße?

(ii) Was ist die erwartete Anzahl von Besuchen im Punkt (1950,1955) während einer Exkursion vom Ursprung $(0,0)$?

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}_{(0,0)}[\sum_{n=0}^{\tau-1} \left(\frac{1}{X_{1,n}^2 X_{2,n}^2} I_{\{X_{1,n} \neq 0\}} I_{\{X_{2,n} \neq 0\}} \right)]$, wobei τ die erste Rückkehrzeit zum Ursprung ist.

24. ***Wann kommt das Ross zurück?*** *Ein Springer bewegt sich auf dem „Schachbrett" $S = \{1, \dots, 8\}^2$ zufällig vorwärts, indem er pro Zug rein zufällig einen seiner möglichen Sprünge auswählt. Dies induziert eine Markov Kette auf S. Berechnen Sie für alle $a \in S$ die erwarteten Rückkehrzeiten.*