Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 20. Mai 2016, zu Beginn der Vorlesung

17. ***Rückwärtsmartingale.*** Sei $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \cdots$ eine (absteigende!) Folge von Teilfeldern, und sei X eine integrierbare Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}_n]$ f.s. und in $\mathcal{L}_1$ gegen $\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}_\infty]$ konvergiert, mit $\mathcal{G}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$.
Hinweis: Wenden Sie für jedes $r \geq 1$ das Upcrossing Lemma auf das Martingal $M_n := \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}_{r-n}]$, $n = 0, \dots, r$, an, und benutzen Sie die Lemmata 1.12 und 1.13.

18. ***Ein Beweis des Starken Gesetzes der Großen Zahlen via Martingale.***
a) $X_1, X_2, ...$ seien unabhängige Zufallsvariable, und $\mathcal{T} := \bigcap_{n\geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ deren sogenanntes *terminales Ereignisfeld.* Zeigen Sie: Jedes Ereignis aus $\mathcal{T}$ hat Wahrscheinlichkeit 0 oder 1. (Sie dürfen dabei die folgende Tatsache verwenden: *Ist ein Ereignis von je endlich vielen aus einer Familie von Zufallsvariablen unabhängig, dann auch von dem von der gesamten Familie erzeugten Teilfeld.* Und wenn ein Ereignis von sich selbst unabhängig ist, welche W'keit kann es dann nur haben?)
b) Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte, integrierbare Zufallsvariable, und $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie: $\frac{1}{n} S_n$ konvergiert für $n \to \infty$ fast sicher gegen $\mathbf{E}[X_1]$. (Dabei sind Aufgabe 11, Aufgabe 17 und Teil a) hilfreich. Begründen Sie zuerst, dass $\mathbf{E}[X_1|S_n] = \mathbf{E}[X_1|S_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots] = \mathbf{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \dots]$ f.s. gilt. Überlegen Sie dann auch noch, warum $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n$ messbar ist bzgl. des in Teil a) definierten Teilfeldes $\mathcal{T}$.)

19. ***Charakterisierung von Markovketten durch Martingale.*** $\mathbb{S}$ sei eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $P = (P_{ab})_{a,b\in\mathbb{S}}$ sei eine stochastische Matrix. Für ein beschränktes $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ setzen wir $Pf(a) := \sum_{b\in\mathbb{S}} P_{ab} f(b)$, $a \in \mathbb{S}$ (und denken dabei an die Multiplikation der Matrix P mit f aufgefasst als Spaltenvektor).
$X := (X_0, X_1, \dots)$ sei eine Folge von $\mathbb{S}$-wertigen Zufallsvariablen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) X ist Markovkette mit Übergangsmatrix P.
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $b \in \mathbb{S}$ und alle beschränkten $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{E}[I_{\{X_n=b\}} \varphi(X_0, \dots, X_{n-1})] = \mathbf{E}[P_{X_{n-1}b}\, \varphi(X_0, \dots, X_{n-1})].$$

(iii) Für jedes beschränkte $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ ist

$$M_n^f := f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} (Pf(X_i) - f(X_i)), \quad n = 0, 1, \dots$$

ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal.

20. ***Eine Charakterisierung der gewöhnlichen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ durch zwei Martingale.***
Sei (X_n) ein $\mathbb{Z}$-wertiges Martingal, für das auch $X_n^2 - n$, $n = 0, 1, \dots$, ein Martingal ist. Außerdem gelte $(*)$ $\mathbf{P}(X_n = X_{n-1}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(i) Zeigen Sie, dass dann (X_n) eine gewöhnliche Irrfahrt ist.
(ii) Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung $(*)$?