Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 13. Mai 2016, zu Beginn der Vorlesung

13. *Galton-Watson-Prozesse.* Sei $m > 0$. Wir betrachten eine Generationenfolge, in der - beginnend mit einem Individuum in Generation 0 - jedes Individuum Pois(m)-viele Kinder hat; all diese Kinderzahlen sind unabhängig. Es sei Z_n die Anzahl der Individuen in Generation n. (Man nennt dann (Z_n) einen *Galton-Watson-Prozess mit Kinderzahlverteilung Pois(m)*, vgl. Aufgabe 6 auf S. 30 im Buch. Am besten denkt man gleich an einen *zufälligen Baum.*)
Zeigen Sie:
a) Für alle $\ell, r \in \mathbb{N}$ ist $\mathbf{P}(0 < Z_n \leq \ell,\, n = 0, 1, \dots, r) \leq (1 - e^{-\ell m})^r$.
b) $W_n := Z_n/m^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ist ein Martingal.
c) Auf dem Ereignis $\{Z_n$ konvergiert nicht gegen $0\}$ gilt: $Z_n \to \infty$ f.s.
d) Für $m \leq 1$ konvergiert Z_n gegen 0 f.s.
e) Berechnen Sie die Varianz von W_n. (*Dabei ist Aufgabe 12 hilfreich.*)

14. *Das Pólya-Schema bedingt unter seinem Martingalgrenzwert.*
Wir betrachten das Pólya-Schema mit ursprünglich m Kugeln in der Urne, davon W_0 weiß. (Vgl. das Beispiel im Buch auf Seite 16.) Außerdem betrachten wir für $n = 1, 2, \dots$ die Zufallsvariable $Z_n := I_{\{W_n > W_{n-1}\}}$, also die Indikatorvariable des Ereignisses “die im Schritt von $n-1$ auf n hinzukommende Kugel ist weiß”. Bekanntermaßen gilt (vgl. EleSto-Buch, Seite 94): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n$ austauschbar verteilt.
Es sei nun $\ell \in \mathbb{N}$, Y_n der Anteil der weißen an den nach n Schritten hinzugekommenen Kugeln und X_∞ der (zufällige) asymptotische Anteil der weißen Kugeln in der Urne (vg. Buch S. 20). Berechnen Sie die bedingte Verteilung von $(Z_1, \dots, Z_\ell)$, gegeben X_∞.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ fest, $(a_1, \dots, a_\ell)$ eine 01-Folge der Länge ℓ mit $k := a_1 + \dots + a_\ell$, und $H := I_{\{(Z_1,\dots,Z_\ell)=(a_1,\dots,a_\ell)\}}$. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, beim ℓ-maligen rein zufälligen Ziehen aus n Objekten mit Zurücklegen mindestens eine “Kollision” zu erhalten, konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null. Folgern Sie daraus

$$\mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_\ell) = (a_1, \dots, a_\ell) \mid Y_n) - Y_n^k (1 - Y_n)^{\ell - k} \to 0 \text{ f.s. für } n \to \infty$$

und $\mathbf{E}[(H - Y_n^k(1 - Y_n)^{l-k})f(Y_n)] \to 0$ für stetiges, beschränktes f.

15. *Exkursionen nach oben auf dem Weg nach unten.* Es seien $V_1, V_2, \dots$ unabhängige, $\mathrm{N}(-1, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Für $a > 0$ sei $p(a)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{V_1 + \dots + V_n > a$ für irgendein $n\}$. Bestimmen Sie mit der in der Vorlesung aus dem Stoppsatz hergeleiteten Technik (Buch S. 24) ein möglichst großes $c > 0$ so, dass $p(a) \leq e^{-ca}$ gleichmäßig in a gilt.
Hinweis: Für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable gilt bekanntlich $\mathbf{E}[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

16. *Eine Charakterisierung von Martingalen.* Zeigen Sie: Eine an $\mathbb{F}$ adaptierte Folge von integrierbaren Zufallsvariablen (X_n) ist genau dann ein $\mathbb{F}$-Martingal, falls für jede beschränkte $\mathbb{F}$-Stoppzeit T gilt:

$$\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0] \; .$$

Machen Sie sich dazu klar, dass $T = n + I_E$ mit $E \in \mathcal{F}_n$ eine Stoppzeit ist.