Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 6. Mai 2016, zu Beginn der Vorlesung

9. ***Reziprokes Vorhersagen.*** X, Y seien integrierbare Zufallsvariable mit

$$\mathbf{E}[X|Y] = Y \quad \text{f.s.}, \quad \mathbf{E}[Y|X] = X \quad \text{f.s.}$$

a) Zeigen Sie, dass dann gilt: $(*) \quad X = Y$ f.s.
Beweisen Sie dazu Schritt für Schritt:
i) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{E}[X - Y; X > c, Y \le c] + \mathbf{E}[X - Y; X \le c, Y \le c] = 0$.
ii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{E}[X - Y; X \le c, Y \le c] \le 0$.
iii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{E}[X - Y; X \le c, Y \le c] = 0$.
iv) $\mathbf{E}[X - Y; X > Y] = 0$.
b) Nehmen wir überdies an, dass X und Y quadratintegrierbar sind. Dann lässt sich der Beweis von $(*)$ gewaltig abkürzen - wie ?

10. ***Welche Strategie bringt das größte erwartete Wachstum?***
Wir betrachten ein Wetten auf einen Münzwurf wie in Aufgabe 1. Allerdings sei diesmal Z kein fairer Münzwurf, sondern ein p-Münzwurf mit $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Die von Z erzeugte Filtration nennen wir $\mathbb{F}$. Wieder sei das Vermögen X_n zur Zeit n von der Form $X_n = X_{n-1} + H_n Z_n$, mit deterministischem $X_0 > 0$. Speziell betrachten wollen wir die Familie der Strategien $H_n := \beta_n X_{n-1}$ mit $\beta_n \in (0, 1)$. Es sei $L_m := \log(X_m/X_0)$ die *Zinsrate* (bezogen auf die Zeit zwischen 0 und m).
a) Zeigen Sie: $(*) \quad \mathbf{E}[L_n - L_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \le \alpha$ f.s., mit $\alpha := p \log p + (1-p)\log(1-p) + \log 2$.
b) Bestimmen Sie dasjenige β_n, für welches in $(*)$ Gleichheit herrscht.
c) Fassen Sie zusammen: Welche Strategie maximiert die erwartete Zinsrate?

11. ***Austauschbarkeit.*** Zur Erinnerung: $X_1, \dots, X_n$ heißen *austauschbar verteilt* (oder kurz *austauschbar*) wenn für jede Permutation π von $1, \dots, n$ die Zufallsvariable $\tilde{X} := (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ dieselbe Verteilung hat wie $X := (X_1, \dots, X_n)$.
Wir betrachten austauschbare, integrierbare $X_1, \dots, X_n$ und setzen $S_n := X_1 + \dots + X_n$.
(i) Zeigen Sie, dass für integrierbares $g(X)$ gilt:

$$\mathbf{E}[g(X)|S_n] = \mathbf{E}[g(\tilde{X})|S_n] \text{ f.s.}$$

(ii) Bestimmen Sie $\mathbf{E}[X_1|S_n]$.

12. ***Eine Zerlegung der Varianz.*** Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir Teilfelder $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$. Für eine integrierbare Zufallsvariable X und $k = 0, \dots, n$ setzen wir $M_k := \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_k]$.
(i) Zeigen Sie: $\mathbf{E}[M_{k+1} - M_k|\mathcal{F}_k] = 0, \quad k = 0, \dots, n-1$.
(ii) Für quadratintegirerbares X sind die Zuwächse von (M_k) unkorreliert.
(iii) Sei $\mathcal{F}_0$ das triviale Teilfeld $\{\Omega, \emptyset\} = \{\mathsf{E_s}, \mathsf{E_u}\}$, und sei X $\mathcal{F}_n$-messbar. Wie in (ii) gelte $\mathbf{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(M_1 - M_0)^2] + \dots + \mathbf{E}[(M_n - M_{n-1})^2].$$

Die Aufgaben 9 und 10 sind adaptiert aus dem “kleinen Klassiker” *Probability with Martingales* von D. Williams, CUP 1991.