Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 29. April 2016, zu Beginn der Vorlesung

5. *Da bleibt doch nichts übrig!* Sei X eine quadratintegrierbare Zufallsvariable und sei $\mathcal{G}$ ein Teilfeld mit der Eigenschaft, dass X und $Y := \mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}]$ identisch verteilt sind. Zeigen Sie, dass dann beide Zufallsvariablen f.s. gleich sind.
Hinweis: Rekapitulieren Sie mit Blick auf die Aufgabe 4, dass Y und $X - Y$ orthogonal sind, und genießen Sie die Benefizien von Pythagoras.

6. *Zur Messbarkeit.* a) Es seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ zwei messbare Räume, wobei $\mathcal{A}'$ von einer Kollektion $\mathcal{E}'$ von Teilmengen von S' erzeugt wird. Zeigen Sie: Eine Abbildung $h : S \to S'$ ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, wenn $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{E}'$. (Hinweis: Betrachten Sie die Kollektion $\{B : B \in \mathcal{A}', h^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.)
b) Wir hatten $\mathcal{B}$ als die von der Kollektion aller Intervalle erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ definiert. Üblicherweise definiert man die Borelsche σ-Algebra als die von der Kollektion der offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen äquivalent sind.
c) Zeigen Sie: Der Limes einer punktweise konvergenten Folge von $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-messbaren Abbildungen ist messbar.

7. *Beweis des Faktorisierungslemmas.* Das Teilfeld $\mathcal{G}$ sei von der Gestalt $\mathcal{G} = \sigma(V)$ mit einer S-wertigen Zufallsvariablen V. Sei weiter X eine reellwertige, $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass es eine messbare Funktion $h : S \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $X = h(V)$ gilt. Betrachten Sie dazu die folgenden Teilschritte:

(i) Die Aussage gilt im Fall, dass X nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annimt.

(ii) Mit X sind auch $Y_n = 2^{-n}\lfloor X2^n \rfloor$ $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable.

(iii) Es gibt messbare Funktionen h_n mit $h_n(V) = Y_n$ und $h_1 \leq h_2 \leq \cdots$.

8. *Kontinuierlich verteilt, und doch ohne Dichte!* $(Z_1, Z_2, \ldots)$ sei ein fairer 01-Münzwurf, $U := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} Z_i$, $V := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} Z_i$.
a) Finden Sie die Verteilungsfunktion von U.
b) Finden Sie eine Menge $D \subset [0, 1]$, $D \in \mathcal{B}$, mit $\mathbf{P}(U \in D) = 0$, $\mathbf{P}(V \in D) = 1$.
c) Zeigen Sie: Für alle $a \in [0, 1]$ ist $\mathbf{P}(U = a) = \mathbf{P}(V = a) = 0$.