Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 1. Juli 2016, zu Beginn der Vorlesung

41. *Der Erwartungswert einer Treffzeit.* Sei $W = (W^1, \dots, W^k)$ eine sBB mit Werten in $\mathbb{R}^k$ (d.h. die $W^1, \dots, W^k$ sind unabhängige, reellwertige sBBen). Zeigen Sie: Der Erwartungswert von

$$T_r := \inf\{t \geq 0 : |W| = r\} ,$$

der Treffzeit einer Sphäre um den Ursprüng vom Radius r, ist r^2/k.
Hinweis: Zeigen und benutzen Sie, dass $|W_t|^2 - kt$ ein Martingal ist.

42. *Ornstein-Uhlenbeck Prozess.* Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}$ und eine sBB W die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = -Y_t\,dt + \sqrt{2}\,dW_t, \quad t \geq 0, \quad Y_0 = a$$

oder - gleichbedeutend damit - die Gleichung

$$Y_t = a - \int_0^t Y_s\,ds + \sqrt{2}\,W_t,\ t \geq 0.$$

(i) Überprüfen Sie, dass diese gelöst wird durch

$$Y_t := ae^{-t} - \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)} W_s\,ds + \sqrt{2}W_t, \quad t \geq 0.$$

Warum ist Y ein Gaußscher Prozess?
(ii) (als Kür) Wir betrachten jetzt einen zufälligen Startwert A, unabhängig von W. Wie ist dessen Verteilung zu wählen, damit Y_t so verteilt ist wie Y_0? Verwenden Sie dazu die Itô-Formel $dY_t^2 = 2Y_t\,dY_t + \frac{1}{2}\,2\,d[Y]_t = -2Y_t^2\,dt + 2\sqrt{2}Y_t\,dW_t + 2dt$ sowie (hier ohne Beweis) die Tatsache, dass das Itô-Integral $\int_0^t Y_s dW_s$, $t \geq 0$, wohldefiniert und ein Martingal ist.

43. *Poissonkonfigurationen.* a) Für $\lambda > 0$ seien $V_1, V_2, ...$ unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $1/\lambda$. Wir setzen $T_1 := V_1$, $T_2 := V_1 + V_2$, $T_3 := V_1 + V_2 + V_3$, $\dots$
Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{T_3 < 1 \leq T_4\} \cap \{T_7 < 5 \leq T_8\}$? *Hinweis: Drücken Sie das Ereignis durch die Anzahlen der Punkte $T_1, T_2, \dots$ aus, die in geeignet gewählte Intervalle fallen.*

b) Sei $a \geq 0$ und Π ein homogener Poissonscher Punktprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate λ. Es bezeichne Y den Punkt aus Π, für den der Abstand $D = |Y - a|$ minimal ist. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D.

44. *Martingale beim Poissonprozess.* Sei N ein homogener Poissonprozess mit Sprungrate 1 und Sprungzeiten $T_1 < T_2 < ...$
a) Zeigen Sie, dass $M_t := N_t - t$ und $M_t^2 - t$, $t \geq 0$, Martingale sind.
b) Mit der Definition $N_{s-} := \lim_{r\uparrow s} N_r$ betrachten wir die beiden Prozesse

$$G_t^{(1)} := \int_0^t N_{s-}\,dM_s = \sum_{T_i \leq t} N_{T_i-}(N_{T_i} - N_{T_i-}) - \int_0^t N_{s-}\,ds, \quad t \geq 0,$$

$$G_t^{(2)} := \int_0^t N_s\,dM_s = \sum_{T_i \leq t} N_{T_i}(N_{T_i} - N_{T_i-}) - \int_0^t N_s\,ds, \quad t \geq 0.$$

Welcher davon ist ein Martingal, welcher nicht?