Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 24. Juni 2016, zu Beginn der Vorlesung

37. ***01-Gesetz von Blumenthal.*** W sei eine sBB und $\mathbb{F}$ die von ihr erzeugte Filtration.
(i) Zeigen Sie für $E \in \mathcal{F}_{0+}$, dass $\mathbf{P}(E) = 0$ oder $\mathbf{P}(E) = 1$. *Hinweis: Starke Markoveigenschaft für die Stoppzeit $T = 0$.*
(ii) Bestimmen Sie damit und mit Hilfe der Aufgaben 35 ind 36

$$\mathbf{P}(W_{t_n} > \sqrt{t_n} \text{ für eine Folge } t_n \downarrow 0)\ .$$

38. ***Brownsche Brücke.*** W sei eine sBB und $W_{[0,1]} = (W_t)_{0\le t\le 1}$ ihre Einschränkung auf das Zeitintervall $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für messbares, beschränktes $g : C[0,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{E}[g(W_{[0,1]}) \,|\, W_1] = \varphi(W_1) \quad \text{mit} \quad \varphi(x) := \mathbf{E}[g(B + \mathbf{t}\cdot x)] \quad \text{f.s.}$$

wobei B eine Brownsche Brücke ist und $\mathbf{t}$ die identische Funktion von $[0,1]$ nach $[0,1]$ bezeichnet.[1]

39. ***Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.*** Es sei $X = (X_t)$ ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (wie in Bsp. 3 auf S. 78 des Buches), und $s > 0$.
a) Warum ist (X_0, X_s) so verteilt wie $(Z_0, e^{-s}Z_0 + \sqrt{1-e^{-2s}}Z_1)$, mit Z_0, Z_1 unabhängig und standard-normalverteilt?
b) Zeigen Sie: Für messbares, beschränktes $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathbf{E}[h(X_s)|X_0] = \varphi(X_0)$ f.s., mit $\varphi(x) := \mathbf{E}[h(e^{-s}x + \sqrt{1-e^{-2s}}Z)]$ und Z standard-normalverteilt.[2]
c) Zeigen Sie: Für alle n und $k \in \mathbb{N}$ ist der Zuwachs $\Delta X_{\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}}$ so verteilt wie $(e^{-1/n} - 1)X_{\frac{k-1}{n}} + \sqrt{1-e^{-2/n}}Z$, mit standard-normalverteiltem, von $(X_0, X_{\frac{1}{n}}, \dots, X_{\frac{k-1}{n}})$ unabhängigem Z.

Angesichts der Asymptotik $1 - e^{-\delta} \sim -\delta$ für $\delta \to 0$ legt dies nahe, dass X die "stochastische Differentialgleichung" $dX_t = -X_t\,dt + \sqrt{2}\,dB_t$ erfüllt, mit einer standard Brownschen Bewegung B. Wie wir bald sehen werden, ist dies tatsächlich der Fall.

40. ***Die Randverteilungen reichen nicht.*** Konstruieren Sie eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable (X_1, X_2), sodass X_1 und X_2 standard-normalverteilt sind, jedoch (X_1, X_2) nicht gaußverteilt ist.

---

[1] In diesem Sinn ist die *bedingte Verteilung von $W_{[0,1]}$ gegeben* $\{W_1 = x\}$ f.s. gleich der Verteilung von $B + \mathbf{t}\cdot x$.
[2] In diesem Sinn ist die bedingte Verteilung von X_s gegeben $\{X_0 = x\}$ f.s. gleich $\mathrm{N}(e^{-s}x, 1 - e^{-2s})$.