# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Tutoren: Tim Jahn, Anna Kremer, Elisabeth Stenschke, Jasmin Straub.
Übungskoordinatorin: Noela Müller

Abgabe der Lösungen: Freitag, 22. April 2016, zu Beginn der Vorlesung

Im Folgenden sei $Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$ ein fairer $\{+1, -1\}$- Münzwurf.
In der Vorlesung haben wir definiert:
*Ein $Z$-Martingal ist eine Folge $M$ von reellwertigen ZV'en $M_0, M_1, \ldots$ mit den Eigenschaften*
*(i)* $M_0 = const$, $\forall n \geq 1\ \exists g_n : M_n = g_n(Z_1, \ldots, Z_n)$,
*(ii)* $\mathbf{E}[M_n | Z_1, \ldots, Z_{n-1}] = M_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

**1.** ***Münzwurf-adaptierte Martingale als diskrete stochastische Integrale.***
Zeigen Sie: Jedes $Z$-Martingal $M$ hat eine Darstellung

$$M_n = M_{n-1} + H_n Z_n$$

mit $H_n$ von der Form $H_n = h_n(Z_1, \ldots, Z_{n-1})$. Bestimmen Sie dazu die Funktionen $h_n$ aus den $(g_j)$.

**2.** a) ***Den Stoppsatz überlistet!*** Finden Sie eine $Z$-Stoppzeit $T$ und ein $Z$-Martingal $M$ mit $\mathbf{E}[M_T] \neq \mathbf{E}[M_0]$.
b) ***Konstanter Erwartungswert und doch kein Martingal.*** Finden Sie einen $Z$-adaptierten Prozess $X$ mit $\mathbf{E}[X_n] = 0$, $n \geq 0$, der kein $Z$-Martingal ist.
c) ***Die Summe von Martingalen.*** Zeigen Sie:
(i) Die Summe von zwei $Z$-Martingalen ist ein $Z$-Martingal.
(ii) Die Summe $\sum_{m=1}^{\infty} X^{(m)}$ der laufenden Spielstände der auf das Muster $+-+-$ wettenden Spielertruppe (vgl. Vorlesung und Buch Abschnitt 1.1) ist ein $Z$-Martingal.

**3.** ***Warten auf ein Muster.*** Für $a \in \{-1, 1\}^4$ sei

$$T_a := \inf\{k \geq 4 : (Z_{k-3}, Z_{k-2}, Z_{k-1}, Z_k) = a\}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{E}[T_a]$ für alle 16 Muster. Für welche Muster $a$ ist $\mathbf{E}[T_a]$ maximal bzw. minimal?

**4.** ***Zerlegung der Varianz und Pythagoras.*** $X$ sei eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$, und $V$ sei eine beliebige Zufallsvariable.
a) Zeigen Sie: Die *Prognose* $Y := \mathbf{E}[X|V]$ (von $X$ auf der Basis von $V$) und der *Prognosefehler* $X - Y$ sind unkorreliert.
b) Beweisen Sie die *Formel von der Zerlegung der Varianz*:

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{Var}[Y] + \mathbf{E}[\mathbf{E}[(X-Y)^2|V]].$$

(In Worten und als Merkregel: *Die Varianz ist die Summe aus der Varianz der bedingten Erwartung und dem Erwartungswert der bedingten Varianz.*