Zum Ruinproblem im diskreten Cramér-Lundberg-Modell: Heuristisches und Technisches.

Wir halten uns an das auf Seite 24 des Buches beschriebene Modell, mit den dortigen Bezeichnungen.

1. **Warum betrachtet man ausgerechnet $e^{\lambda V}$?** (Eine Frage, die in der Vorlesung gestellt wurde.)
Einer der guten Gründe ist die *exponentielle Chebychev-Ungleichung*, die für jede reellwertige Zufallsvariable Z und alle positiven Zahlen a, λ gilt.

$$\mathbf{P}(Z \geq a) \leq e^{-\lambda a}\mathbf{E}[e^{\lambda Z}].$$

Man sieht sie durch einfaches Umstellen ein:
$\mathbf{E}[e^{\lambda Z}] \geq \mathbf{E}[e^{\lambda Z} I_{\{Z\geq a\}}] \geq \mathbf{E}[e^{\lambda a} I_{\{Z\geq a\}}] = e^{\lambda a}\mathbf{P}(Z \geq a)$.
Der zweite ist die Tatsache, dass unter der Voraussetzung $\mathbf{E}[e^{\lambda V}] < 1$ die Folge $X_n := \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n V_i\right)$, $n = 0, 1, \ldots$ ein Supermartingal ist. Wegen $\{T < n\} \subset \{X_{n\wedge T} \geq a\}$ und $\mathbf{E}[X_{n\wedge T}] \leq 1$ folgt sofort aus der exponentiellen Chebychev-Ungleichung:

$$\mathbf{P}(T < n) \leq e^{-\lambda a}.$$

2. **Wie könnte ein V mit $\mathbf{E}[V] < 0$ aussehen, für das es kein $\lambda > 0$ gibt mit $\mathbf{E}[e^{\lambda V}] < 1$?**

Wir betrachten dazu $Z := 1$, und ein U, dessen Dichte nicht mindestens exponentiell, sondern viel langsamer, nämlich mit einer Potenz von $1/x$ abfällt. Konkret: U habe die Dichte $\frac{1}{2x^3}\,dx$, $x \geq 1$. Dann ist $\mathbf{E}[U] = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$, und für $b > 1$ ist $\mathbf{E}[V] = [U - b] < 0$. Andererseits ist für jedes $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}[e^{\lambda V}] = e^{-\lambda b}\mathbf{E}[e^{\lambda U}] = e^{-\lambda b}\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{\lambda x}\frac{1}{x^3}dx = \infty.$$

3. **Warum folgt aus der Existenz eines $\eta > 0$ mit $\mathbf{E}[e^{\eta V}] < \infty$ und der Negativität von $\mathbf{E}[V]$, dass es ein $\lambda > 0$ gibt mit $\mathbf{E}[e^{\lambda V}] < 1$?**

Hierzu eine Skizze in Form einer Übungsaufgabe:
a) Es seien c, d nichtnegative Zahlen. Machen Sie sich klar, dass für $0 < s \leq \alpha$

$$c \leq \frac{e^{sc} - 1}{s} \leq ce^{sc} \leq \frac{1}{\alpha}\alpha c e^{\alpha c} \leq \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha c} \qquad \text{and} \qquad \left|\frac{e^{-sd} - 1}{s}\right| \leq d$$

b) Schließen Sie aus a), dass für $v \in \mathbb{R}$ und $0 < s \leq \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\frac{e^{sv} - 1}{s}\right| \leq \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha v} + |v|.$$

Setzen Sie dazu $c := v^+$, $d := v^-$.
c) Sei V eine integrierbare Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[e^{\eta V}] < \infty$ für ein $\eta > 0$. Verwenden Sie b) und dominierte Konvergenz zum Nachweis der folgenden Gleichheit:

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\left(\mathbf{E}[e^{sV}] - 1\right) = \mathbf{E}[V].$$