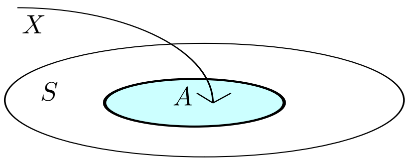
σ-Algebren, Teilfelder und messbare Abbildungen

Wir erinnern an ein Logo der Elementaren Stochastik:



Dort haben wir für bestimmte Teilmengen A einer nichtleeren Menge S die *Ereignisse* $\{X \in A\}$ betrachtet und diesen Ereignissen *Wahrscheinlichkeiten* in konsistenter (abzählbar additiver) Weise zugeordnet. Falls S abzählbar ist, lässt sich das mühelos für *alle* Teilmengen A von S bewerkstelligen. Falls jedoch S überabzählbar ist, stellt es sich heraus, dass das Zulassen *aller* Teilmengen A mit einer nichttrivialen Maßtheorie unverträglich ist. Deshalb beschränkt man sich auf (hinreichend große) Kollektionen von "interessierenden" Teilmengen von S.

Definition 1. Eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Teilmengen von S heißt eine *σ-Algebra auf S* $:\Longleftrightarrow$
(i) $S \in \mathcal{A}$,
(ii) mit A ist auch $S \setminus A =: A^c \in \mathcal{A}$,
(iii) mit $A_1, A_2, \dots$ ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Das Paar $(S, \mathcal{A})$ heißt dann ein *messbarer Raum*, die $A \in \mathcal{A}$ heißen die *($\mathcal{A}$)-messbaren Teilmengen* von S. Jede σ-Algebra $\mathcal{T}$ auf S mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ heißt *Teil-σ-Algebra* von $\mathcal{A}$.

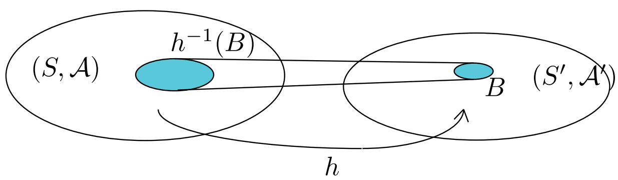
Bemerkung 1. Der beliebige Durchschnitt von σ-Algebren auf S ist wieder eine σ-Algebra auf S.

Definition 2. Sei $\mathfrak{C}$ eine Kollektion von Teilmengen von S. Der Durchschnitt aller σ-Algebren auf S, die $\mathfrak{C}$ enthalten, heißt die von $\mathfrak{C}$ erzeugte σ-Algebra (Symbol: $\sigma(\mathfrak{C})$).

Das prominenteste Beispiel ist die *σ-Algebra der Borelmengen*[1] auf $\mathbb{R}$, üblicherweise bezeichnet mit $\mathcal{B}$. Sie wird von der Kollektion aller Intervalle auf $\mathbb{R}$ erzeugt.

Wir betrachten jetzt zwei messbare Räume $(S, \mathcal{A})$, $(S', \mathcal{A}')$. Eine Abbildung h heißt $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$ *messbar*, wenn

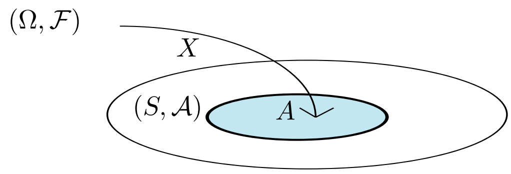
$$\text{für alle } B \in \mathcal{A}' \text{ das Urbild } h^{-1}(B) \text{ zu } \mathcal{A} \text{ gehört.}$$



Die Kollektion $\{h^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}'\}$ heißt die von h (auf S) erzeugte σ-Algebra. Die $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-Messbarkeit von h ist somit äquivalent dazu, dass die von h erzeugte σ-Algebra in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

[1] benannt nach Émile Borel (1873-1956)

Im *Mengenmodell der Stochastik* denkt man sich einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Man nennt $\mathcal{F}$ das *Ereignisfeld* und spricht von den messbaren Mengen $E \in \mathcal{F}$ als *Ereignissen*. Eine S-wertige Zufallsvariable X wird dann beschrieben durch eine $\mathcal{F} - \mathcal{A}$-messbare Abbildung. Das Ereignis $\{X \in A\}$ wird dann zum Urbild $X^{-1}(A)$.



Die Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ nennen wir *Teilfelder*, und nennen für ein Teilfeld $\mathcal{G}$ - verträglich mit den obigen Definitionen - eine S-wertige Zufallsvariable X *$\mathcal{G}$-messbar*, wenn $\{X \in A\} \in \mathcal{G}$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Entsprechend nennen wir

$$\sigma(X) := \{\{X \in A\} : A \in \mathcal{A}\}$$

das *von der Zufallsvariablen X erzeugte Teilfeld*.

In den Übungen beweisen wir das (z.B. bei der Definition der bedingten Erwartung gegeben V) nützliche

Faktorisierungslemma: Sei V eine $(S, \mathcal{A})$ wertige Zufallsvariable, und Y eine rellwertige Zufallsvariable. Ist Y $\sigma(V)$-messbar, dann existiert ein $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbares h mit $Y = h(V)$.