Die Formel von Itô - ganz kurz gefasst

W sei eine standard Brownsche Bewegung. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $t > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$s_i := s_{i,n} := \frac{it}{n}, \quad \Delta_i := \Delta W(s_{i-1}, s_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt für geeignetes Z_i zwischen W_{s_i-1} und W_{s_i}:

$$f(W_t) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} f'(W_{s_{i-1}})\Delta_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(Z_i)\Delta_i^2$$

Nach Lemma 3.14 im Buch konvergiert der Term ganz rechts für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{2}\int_0^1 f''(W_s)\, ds$. Damit ergibt sich sofort das

Korollar. $\sum_{i=1}^{n} f'(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})$ *konvergiert für* $n \to \infty$ *in Wahrscheinlichkeit.*

Der Grenzwert wird mit $\int_0^t f'(W_s) dW_s$ notiert und als *Itô-Integral* bezeichnet.
Also haben wir

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds \text{ f.s.} \qquad \text{(Itô-Formel)}$$

In Kurzform:

$$df(W) = f'(W)\, dW + \frac{1}{2} f''(W)\, dt\,.$$

In Kürzestform[1]

$$(dW)^2 = dt\,.$$

Die Itô-Formel zeigt: Zumindest für stetig differenzierbares g gibt es eine Version des Itô-Integrals so dass

$$I_t := \int_0^t g(W_s) dW_s, \qquad t \geq 0,$$

f.s. stetige Pfade hat. Ist g' beschränkt, dann garantiert Satz 3.12, dass $(I_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Beispiel: Für $f'(x) = g(x) := 2x$ ergibt sich

$$\int_0^t 2W_s\, dW_s = W_t^2 - t. \qquad (*)$$

Im Buch ist (gleich zu Beginn des Abschnittes) Itôs elementare Rechnung vermerkt, die unmittelbar auf $(*)$ führt und die für ihn um 1942 anhand eben dieses Beispiels der Ausgangspunkt zur Definition "seines" Integralbegriffs war.

Bemerkung: Allgemeiner gilt (hier ohne Beweis): Hat X das *stochastische Differential*[2] $dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t + \mu(X_t) dt$ und ist $(t, x) \to g(t, x)$ einmal stetig differenzierbar in t und zweimal stetig differenzierbar in x, dann folgt

$$\begin{aligned} dg(t, X_t) &= g_t(t, X_t) dt + g_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t, X_t) d[X]_t \\ &= \left(g_t(t, X_t) + g_x(t, X_t)\mu(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t) g_{xx}(t, X_t) \right) dt + g_x(t, X_t) dW_t. \end{aligned}$$

[1] mit Blick auf eine Taylorentwicklung bis zur Ordnung 2, und in Erinnerung an den Satz über die quadratische Variation der Brownschen Pfade

[2] in dem Sinn, dass $X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \int \mu(X_s) ds$ f.s. gilt