Treffwahrscheinlichkeiten und erwartete Treffzeiten bei der gewöhnlichen Irrfahrt: der analytische Zugang. (Eine Reprise aus der Elementaren Stochastik.)

Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:
$X_n = X_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$, mit (Z_i) fairer ± 1-Münzwurf, unabhängig von X_0. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Für $-a \le X_0 \le b$ sei $T := \min\{n \ge 0 : X_n \in \{-a, b\}$ Gesucht: $w(x) := \mathbf{P}(X_T = b \mid X_0 = x)$ und $e(x) := \mathbf{E}[T \mid X_0 = x]$.

Die *Zerlegung nach dem ersten Schritt* ergibt (vgl. Elementare Stochastik Buch S. 104 und S. 106):

$$w(x) = \frac{1}{2}\left(w(x+1) + w(x-1)\right), \quad -a < x < b \tag{1}$$
$$w(-a) = 0, \quad w(b) = 1,$$
$$e(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(e(x+1) + e(x-1)\right), \quad -a < x < b \tag{2}$$
$$e(-a) = e(b) = 0.$$

Mit dem *zweiten Differenzenoperator*

$$D^2 f(x) := f(x+1) - f(x) - \big(f(x) - f(x-1)\big) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \quad \text{für } f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

schreiben sich (1) und (2) als

$$\frac{1}{2} D^2 w(x) = 0, \tag{3}$$
$$\frac{1}{2} D^2 e(x) = -1, \tag{4}$$

jeweils für $x \in \{-a+1, \ldots, b-1\}$. Also beschreibt w eine “Gerade”, und e eine “Parabel” mit “Krümmung” -2. Mit den jeweiligen Randbedingungen ergibt sich

$$w(x) = \frac{x+a}{a+b}, \quad e(x) = (b-x)(x+a)$$

für $-a \le x \le b$. Speziell für $x = 0$ folgt

$$w(0) = \frac{a}{a+b}, \quad e(0) = ab.$$

Letzteres haben wir in der Vorlesung auch mit Martingalargumenten hergeleitet, siehe Buch S. 23.

Nebenbei bemerkt: (3) und (4) sind diskrete Analoga (auf $\mathbb{Z}$ statt auf $\mathbb{R}^d$) zur *Laplacegleichung* $\Delta f(x) = 0$ und zur *Poissongleichung* $\Delta f(x) = -g(x)$, jeweils für $x \in B$ mit offenem $B \subset \mathbb{R}^d$. Dabei ist $\Delta := (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2})$ der *Laplaceoperator.* Toll dabei ist, dass diese beiden Gleichungen mit den passenden “Randbedingungen” die Treffwahrscheinlichkeiten auf ∂B (dem *Rand* von B) bzw. die erwartete Treffzeit von ∂B, jeweils bei Start in $x \in B$, beschreiben, jetzt für eine *standard Brownsche Bewegung* W anstelle der gewöhnlichen Irrfahrt X. Mehr dazu in Kapitel 3!