Gaußsche Prozesse und Brownsche Bewegung

Definición. $X = (X_1, \dots, X_n)$ ist *eine gaußsche Zufallsvariable (auf* $\mathbb{R}^n$*)* $:\Longleftrightarrow$
$\forall c \in \mathbb{R}^n : \quad \langle c, X\rangle = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ist normalverteilt auf $\mathbb{R}$.
In diesem Fall ist jede lineare Transformation AX eine gaußsche Zufallsvariable, weil $\langle c, AX\rangle = \langle c^T A, X\rangle$.

Bemerkung 1. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige gaußsche Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$. Dann ist $(X_1, \dots, X_n)$ eine gaußsche Zufallsvariable auf $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.6. Sei X eine gaußsche Zufallsvariable. Dann ist die Verteilung von X bestimmt durch den Erwartungswertvektor μ, mit Komponenten $\mu_i = \mathbf{E}[X_i]$, zusammen mit der Kovarianzmatrix Γ, mit Einträgen $\gamma_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$.

Lema 3.7*. Sei $X = (X_1, X_2)$ gaußsch, mit $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Dann sind X_1, X_2 unabhängig.
Beweis. Sei $X' = (X'_1, X'_2)$ eine unabhängige Kopie von X. Dann ist auch $Y := (X_1, X'_2)$ (welches ebenfalls unabhängige Gaußsche Komponenten hat) gaußsch (wegen Bem. 1), mit $\mu_X = \mu_Y$, y $\Gamma_X = \Gamma_Y$. Wegen Lemma 3.6 haben X und Y dieselbe Verteilung.Folglich sind, ebenso wie die zwei Komponenten von Y, auch die zwei Komponenten von X unabhängig. □

Das folgende Lemma verallgemeinert dieses von 2 auf n Komponenten.

Lemma 3.7. Seien $1 \le k < n$ natürliche Zahlen.Sind für eine Gaußverteilte Zufallsvariable $X = (X_1, \dots, X_n)$ für alle $i \le k < j$ die Kovarianzen $\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = 0$, so sind $(X_1, \dots, X_k)$ und $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ unabhängig.
Beweis: Es bezeichne X' eine unabhängige Kopie von X. Mit X ist offenbar auch $(X_1, \dots, X_k)$ gaußverteilt, und mit X' auch $(X'_{k+1}, \dots, X'_n)$. Da Summen von unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind, ist auch $Y = (X_1, \dots, X_k, X'_{k+1}, \dots, X'_n)$ gaußverteilt. Außerdem haben X und Y gleichen Mittelwertvektor und gleiche Kovarianzmatrix, daher sind sie nach dem vorigen Lemma identisch verteilt. Y erfüllt die behauptete Unabhängigkeit, deswegen gilt sie auch für X.

Definition. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\ge 0}$ heißt *gaußsch* wenn
$\forall k\ \forall 0 \le t_1 \le \dots \le t_k : \quad (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ eine gaußsche Zufallsvariable ist. Dann heißt
$\gamma(s,t) := \mathbf{Cov}(X_s, X_t), \quad s < t$ die *Kovarianzfunktion* von X. Zusammen mit der Erwartungswertfunktion $\mathbf{E}[X_t]$, $t \ge 0$, bestimmt sie die Verteilung von X (siehe Lemma 3.6)

Repetición. Un *movimiento Browniano estándard (mBe)* $W = (W_t)_{t\ge 0}$ es un proceso esocástico con $W_0 = 0$ casi seguramente (c.s.), y las propiedades siguientes:
(i) $\Delta W_{s,t} := W_t - W_s$ tiene distribución $\mathrm{N}(0, t-s), \quad s < t$,
(ii) $\Delta W_{t_0,t_1}, \dots, \Delta W_{t_{k-1},t_k}$ son independientes, $\quad t_0 < \ldots < t_k$,
(iii) W tiene c.s. trayectorias continuas.

Bemerkung 2. Eine sBB W ist ein gaußscher Prozess[1], mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = s \wedge t$.

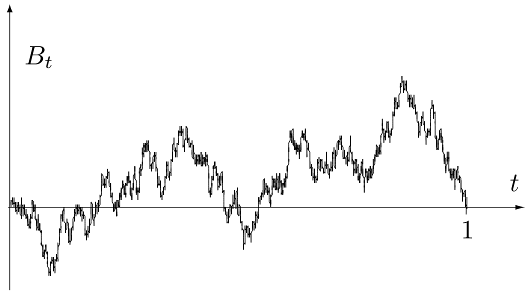
Proposición 3.8. Ein stochastischer Prozess W mit $W_0 = 0$ f.s. und mit f.s. stetigen Pfaden ist eine sBB dann und nur dann wenn W ein Gaußcher Prozess ist mit $\mathbf{E}[W_t] = 0$ y $\gamma(s,t) = s \wedge t$.

Beweis. "$\Longrightarrow$": Siehe Bemerkung 2.
"$\Longleftarrow$": $(\Delta W_{t_0,t_1}, \dots, \Delta W_{t_{k-1},t_k})$ ist eine lineare Transformation der ZV $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k})$, und für $t_0 < t_1 < t_2$ haben wir $\mathbf{Cov}(W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}) = t_1 - t_1 - t_0 + t_0 = 0$. □

[1] weil $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}) = (\Delta W_{0,t_1}, \Delta W_{0,t_1} + \Delta W_{t_1,t_2}, \dots, \Delta W_{0,t_1} + \dots + \Delta W_{t_{k-1},t_k})$ eine lineare Transformation der gaußschen ZV $(\Delta W_{0,t_1}, \dots, \Delta W_{t_{k-1},t_k})$ ist

Beispiele.

1.Die Brownsche Brücke. $B_t := W_1 - tW_t, \quad 0 \leq t \leq 1.$
$\mathbf{Cov}(W_t - tW_1, W_1) = t - t = 0$, deshalb ist $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ unabhängig von W_1. Man nennt B eine *Brownsche Brücke*. Ihre Kovarianzfunktion funcion ist $\mathbf{Cov}(B_s, B_t) = s(1-t)$, $0 \leq s \leq t \leq 1$.



$(B_t + tx)$ reprßentiert die bedingte Verteilung von (W_t), gegeben $\{W_1 = x\}$ (siehe Übungen).

2. Der Makrokosmos im Mikrokosmos gespiegelt. $W'_t := tW_{1/t}$, $t > 0$, $\quad W'_0 := 0.$
W' ist ein gaußcher Prozess.
$\mathbf{Cov}(W'_s, W'_t) = \begin{cases} st \min(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) = \min(s,t), & \text{si } s \text{ y } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } s \text{ o } t = 0 \end{cases}$ Dank den Sätzen 3.8 und 3.1 hat W'f.s. stetige Pfade. Sei W'' eine stetige Version von W'. Weil $t \mapsto tW_{1/t}$ stetig in $t > 0$ ist, haben wir $W''_t = tW_{1/t} \forall t > 0$. Insbesondere konvergiert $\frac{1}{t}W_t \to W''_0 = 0$ f.s. für $t \to 0$.

3. Stationärer Ornstein-Ohlenbeck Prozess. $X_t := e^{-t}W_{e^{2t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$
$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist ein Gaußscher Prozess.
Für $s < t$, ist $\mathbf{Cov}(X_s, X_t) = e^{-s}e^{-t}e^{2s} = e^{s-t}$, also ist $\gamma(s,t) = e^{-|s-t|}$, $\quad s, t \in \mathbb{R}$.
Damit hängt die Verteilung von $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_k+h})$ nicht vom Translationsparameter h ab. Man nennt X einen *stationären Ornstein-Uhlenbeck Prozess.*