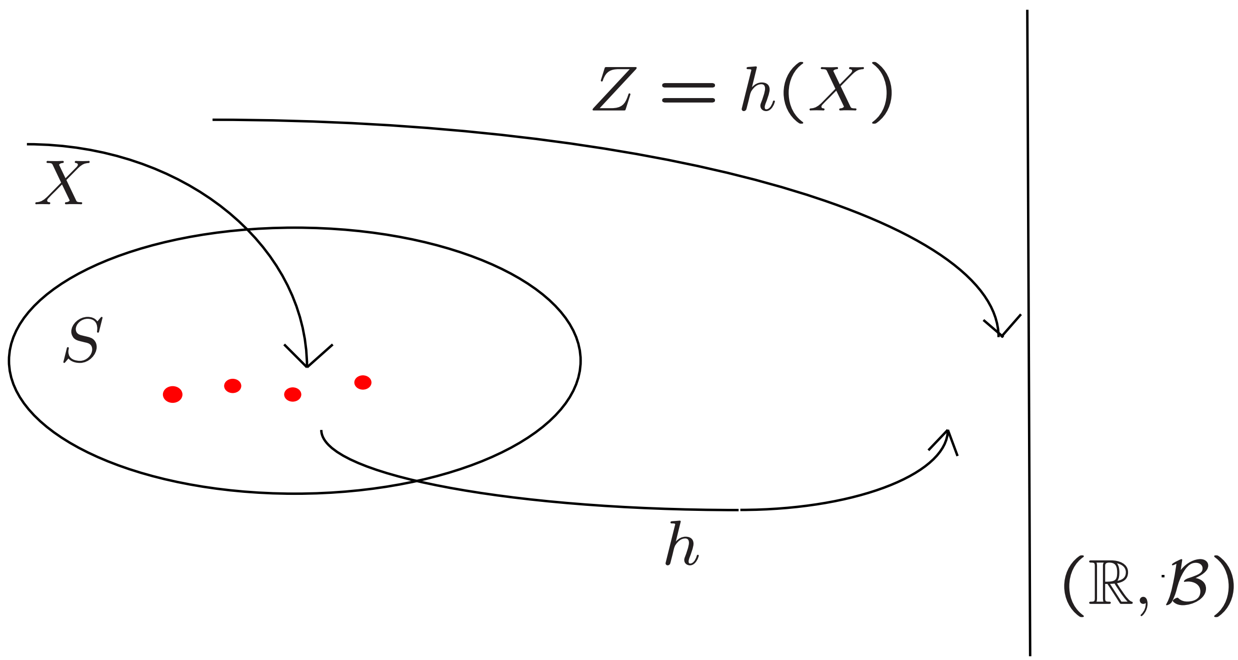
Erwartungswert und Integral

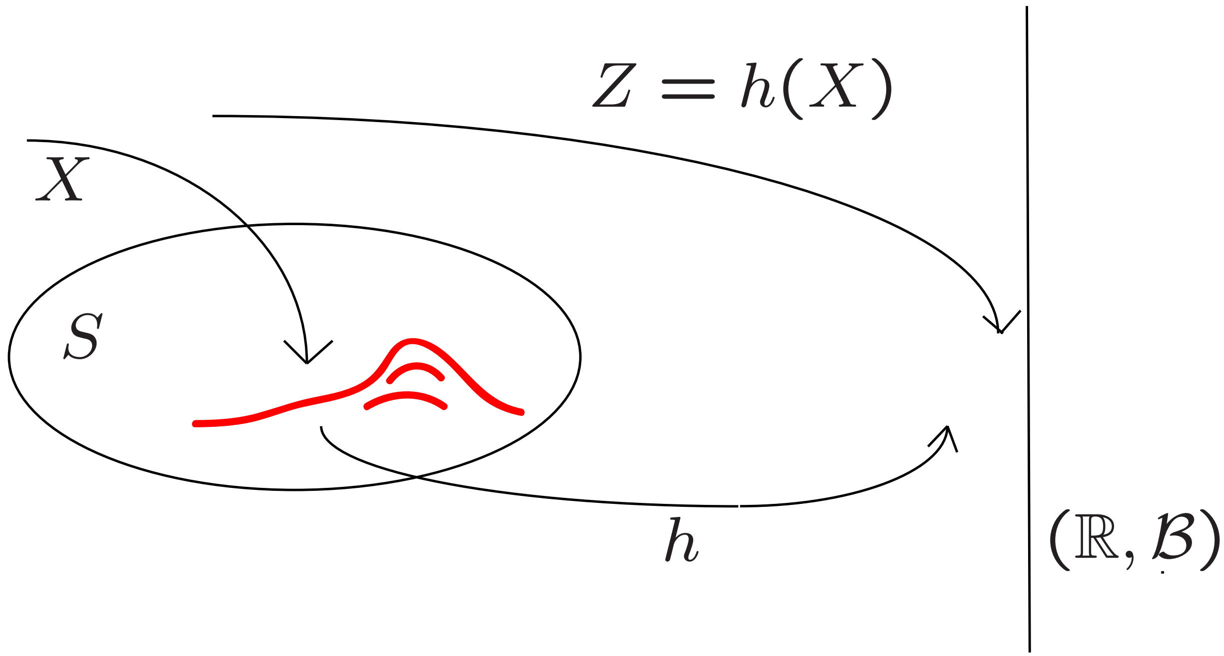
Perlen der Lebesgue'schen Integrationstheorie

X mit Verteilungsgewichten $\rho(a)$



$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a) = \sum_{a \in S} h(a)\, \rho(a)$$

X mit Dichte $g(a)\,da$



$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_S h(a)\,\mathbf{P}(X \in da) = \int_S h(a)\,g(a)da$$

$\mathbf{P}(X = a) = \rho(a)$ und $\mathbf{P}(X \in da) = g(a)\,da$

passen beide in den folgenden Rahmen:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \rho(A),\ A \in \mathcal{A}$$

wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf S ist.

Die Maßzahl der Menge A

ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X \in A\}$.

Die Verteilung der Zufallsvariablen X

ist ein “Wahrscheinlichkeitsmaß” auf $\mathcal{A}$.

Definition: Ein *Maß* auf $\mathcal{A}$

ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

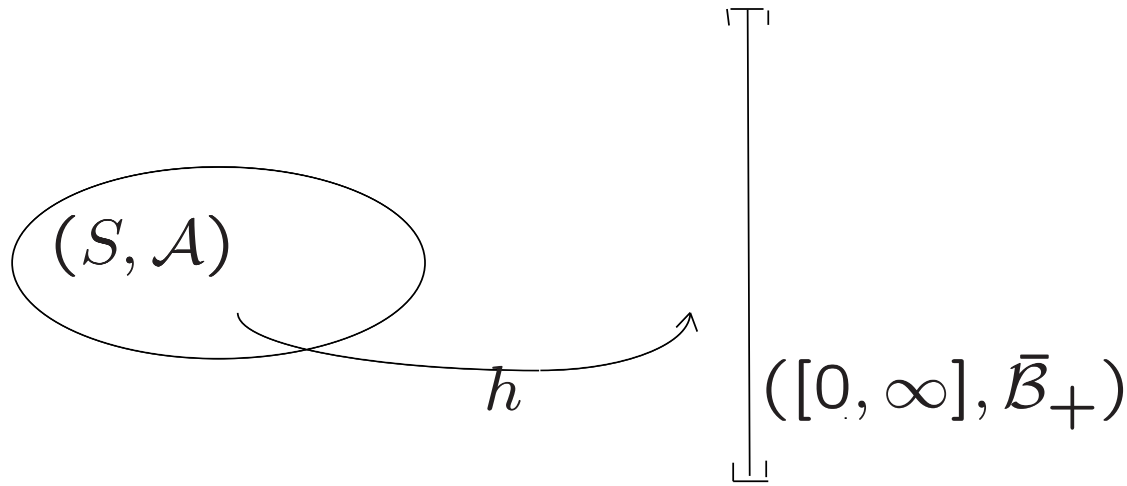
$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$$

für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$.

Kurz: $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist σ*-additiv*.

Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathcal{A}$

ist ein Maß ρ auf $\mathcal{A}$ mit $\rho(S) = 1$.

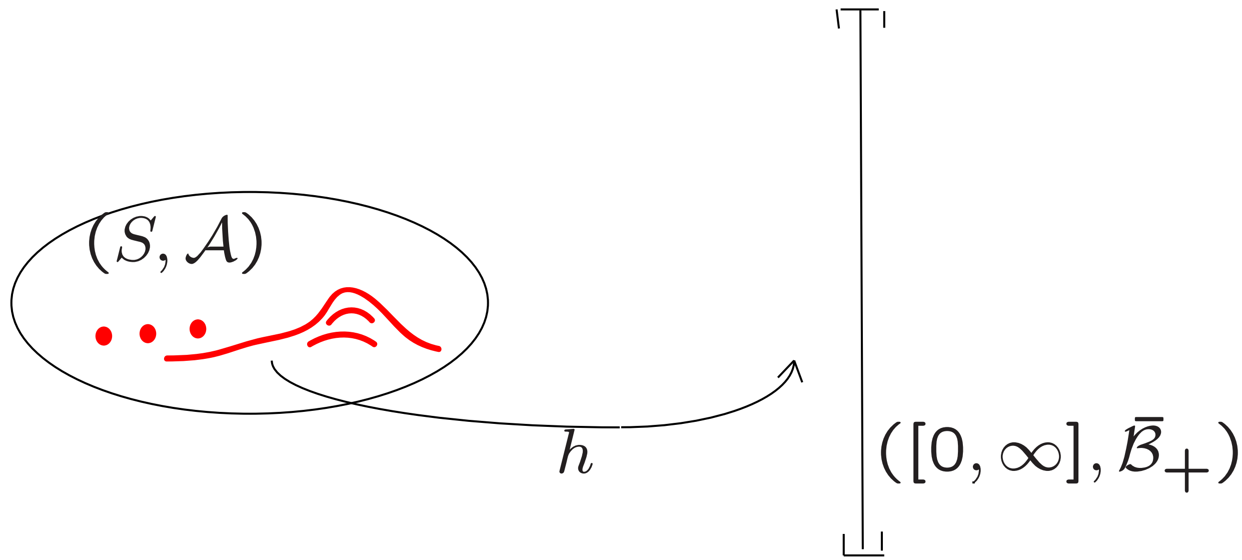


$\bar{\mathcal{B}}_+$ ist die von den Intervallen auf $[0, \infty]$ erzeugte σ-Algebra

(die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$

Die $\mathcal{A}$-$\bar{\mathcal{B}}_+$ messbaren h nennen wir auch

die *nichtnegativen messbaren Funktionen (definiert) auf* S.



Das μ-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen:

Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann existiert genau eine Abbildung

$$h \mapsto \int h \, d\mu$$

mit den folgenden 3 Eigenschaften:

(i) *Fortsetzung:*

$\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$

(ii) *Linearität:*

Für alle $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und nichnegative messbare h_1, h_2 auf S,

$$\int (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)\, d\mu = \alpha_1 \int h_1 d\mu + \alpha_2 \int h_2 d\mu.$$

(iii) *Monotone Konvergenz:*

Für jede Folge $h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ nichtnegativer messbarer Funktionen auf S mit punktweisem Limes h gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu = \int h\, d\mu.$$

Für $h : S \to [-\infty, \infty] =: \bar{\mathbb{R}}$ sei

$$h^+ := \max(h, 0), \;\; h^- := \max(-h, 0)$$

(der *Positivteil* und der *Negativteil* von h).

Für messbares $h : S \to \bar{\mathbb{R}}$ setzt man das μ-Integral von h als

$$\textstyle\int h \, d\mu := \int h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu,$$

vorausgesetzt wenigstens eine der beiden Zahlen

$\int h^+ \, d\mu$ oder $\int h^- \, d\mu$ ist endlich.

Das Integral ist *linear* in h:

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu \, .$$

Andere populäre Schreibweisen für $\int h\,d\mu$ sind

$$\int h(x)\mu(dx) \text{ oder } \int h(x)\,d\mu(x).$$

Für $A \in \mathcal{A}$ schreibt man auch

$$\int_A f(x)\mu(dx) := \int \mathbf{1}_A(x)f(x)\mu(dx).$$

Bemerkung: Sowohl $\int h^+\,d\mu$ als auch $\int h^-\,d\mu$ sind endlich genau dann wenn $\int |h|\,d\mu < \infty$.

In diesem Fall heißt h μ-*integrierbar.*

Die Monotone Konvergenz ist nur *eine* der Perlen
der Lebesgueschen Integrationstheorie.

Hier sind zwei weitere:

Dominierte Konvergenz:

Zu einer Folge (h_n) von reellwertigen messbaren Funktionen

existiere eine reellwertige messbare Funktion g mit

$$\int g\, d\mu < \infty$$

und $|h_n| \leq g,\ n \in \mathbb{N}$

(letzteres zumindest bis auf eine Menge vom μ-Maß Null

Falls (h_n) punktweise (oder zumindest μ-fast überall)

gegen h konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu = \int h\, d\mu.$$

Lemma von Fatou:

Sei (h_n) eine Folge

von nichtnegativen messbaren Funktionen.

Dann gilt:

$$\int \liminf h_n \, d\mu \leq \liminf \int h_n \, d\mu.$$

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

wobei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarere Raum und

$\mathbf{P}$ ein W-Maß auf der σ-Algebra (dem *Ereignisfeld*) $\mathcal{F}$ ist.

Ist $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-messbar und nichtnegativ oder

$\mathbf{P}$-integrierbar, dann schreiben wir

$$\mathbf{E}[Y] = \int Y d\mathbf{P} = \int Y(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$$

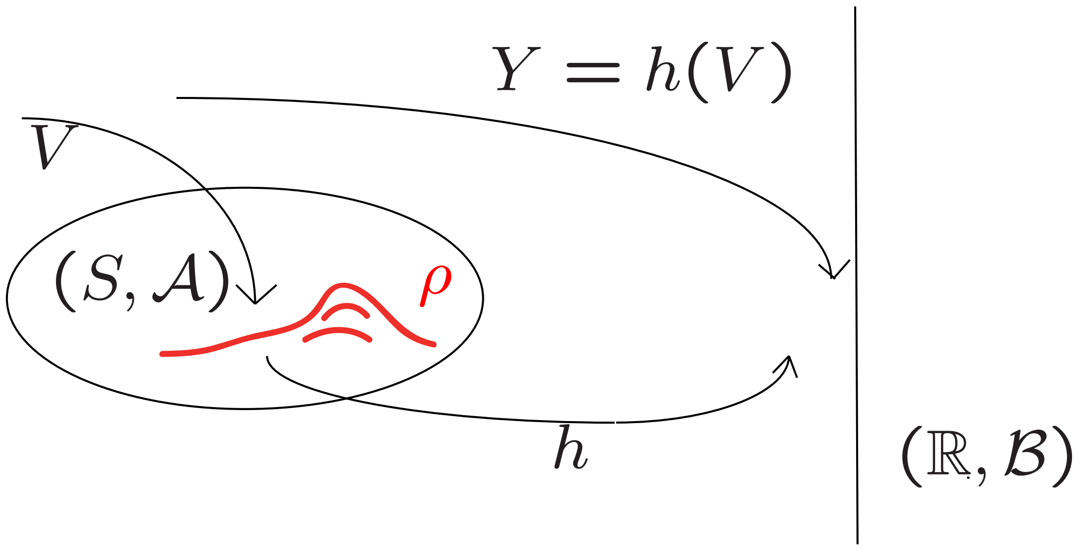
und sprechen vom **Erwartungswert** der Zufallsvariablen Y.

Für die *Verteilung* ρ einer S-wertigen Zufallsvariablen V bekommt man die (aus der elementaren Stochastik vertraute) Beziehung

$$\mathbf{P}(V \in A) = \rho(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Damit lässt sich ρ auffassen als das *Bildmaß* von $\mathbf{P}$ unter der Abbildung V.

Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen



$$\mathbf{E}[h(V)] = \int h(a)\rho(da)$$

Drei Perlen der “Mathematischen Erwartung”.

Monotone Konvergenz. Für $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \uparrow Y$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}[Y].$$

Dominierte Konvergenz. Zu einer Folge (Y_n) rellwertiger ZV’en existiere eine ZV’e G mit

$$\mathbf{P}(|Y_n| \leq G) = 1 \text{ für alle } n, \text{ und } \mathbf{E}[G] < \infty.$$

Falls Y_n f.s. gegen eine ZV’e Y konvergiert, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}[Y].$$

Lemma von Fatou. Für nichtnegative ZV’e Y_n gilt:

$$\mathbf{E}[\liminf Y_n] \leq \liminf \mathbf{E}[Y_n].$$