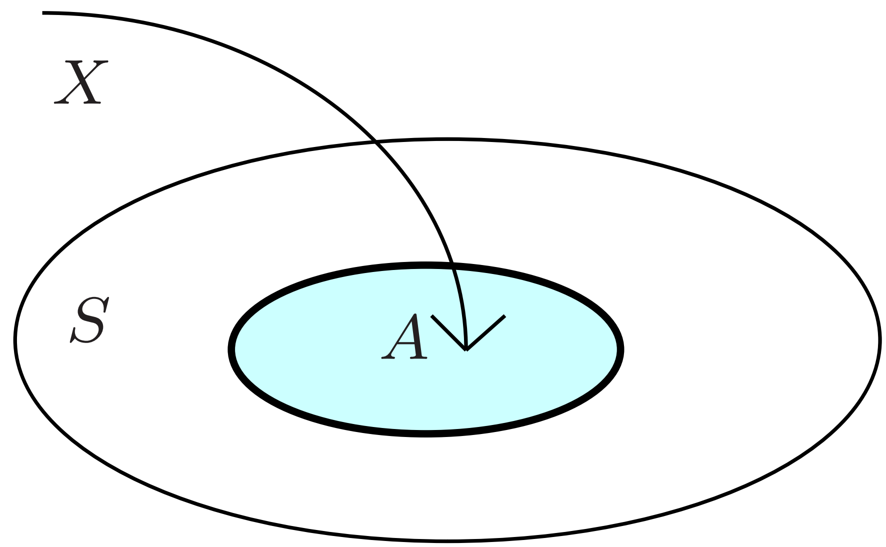
# Intermezzo:

## $\sigma$-Algebren und messbare Abbildungen

Ein Logo aus der Elementaren Stochastik:




$$A \in \mathcal{P}(S)$$

Wenn $S$ überabzählbar ist, ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ für eine nichttriviale (abzählbar-additive) Maßtheorie zu groß

Definition. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ heißt $\sigma$*-Algebra* auf $S$

$:\Longleftrightarrow$

(i) $S \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c := S \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

$(S, \mathcal{A})$ heißt dann ein *messbarer Raum*.

$A \subset S$ heißt $\mathcal{A}$*-messbar* $:\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}$.

Der Schnitt von $\sigma$-Algebren auf $S$ ist eine $\sigma$-Algebra auf $S$.

Beispiel: $S = \mathbb{R}$

$\mathcal{B}$ := Schnitt aller $\sigma$-Algebren auf $\mathbb{R}$,
die jeweils alle Intervalle enthalten.

Auch $\mathcal{B}$ enthält dann alle Intervalle
und ist die kleinste $\sigma$-Algebra mit dieser Eigenschaft.

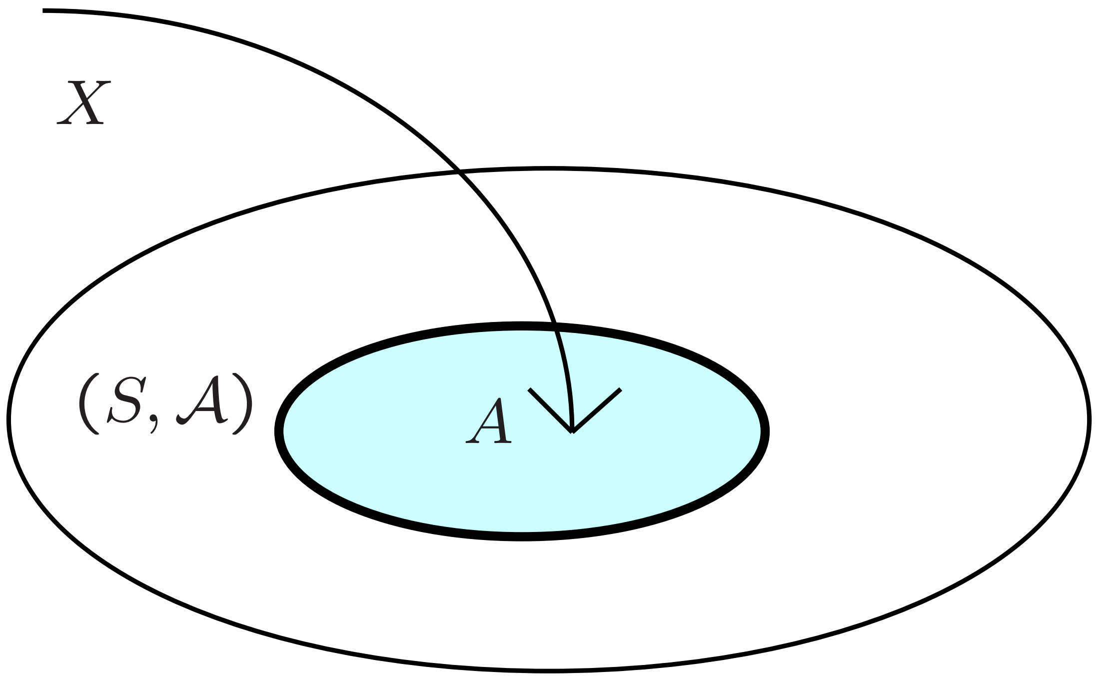
$\mathcal{B}$ heißt die *$\sigma$-Algebra der Borel-Mengen auf* $\mathbb{R}$.

Gleiches Prinzip auch abstrakt:

$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(S)$

$\mathcal{A}(\mathcal{E})$, die von $\mathcal{E}$ *erzeugte $\sigma$-Algebra* auf $S$,

ist die kleinste $\sigma$-Algebra auf $S$, die $\mathcal{E}$ enthält.




$$\sigma(X) := \{\{X \in A\} : A \in \mathcal{A}\}$$

heißt *das von $X$ erzeugte Ereignisfeld*

3 Eigenschaften der Kollektion $\sigma(X)$:  Sie enthält

(1) das sichere Ereignis $\mathrm{E_s}$ (und das unmögliche Ereignis $\mathrm{E_u}$)

(2) mit jedem Ereignis $E$ auch dessen Gegenereignis $E^c$

(3) mit jeder abzählbaren Familie $E_1, E_2, \ldots$

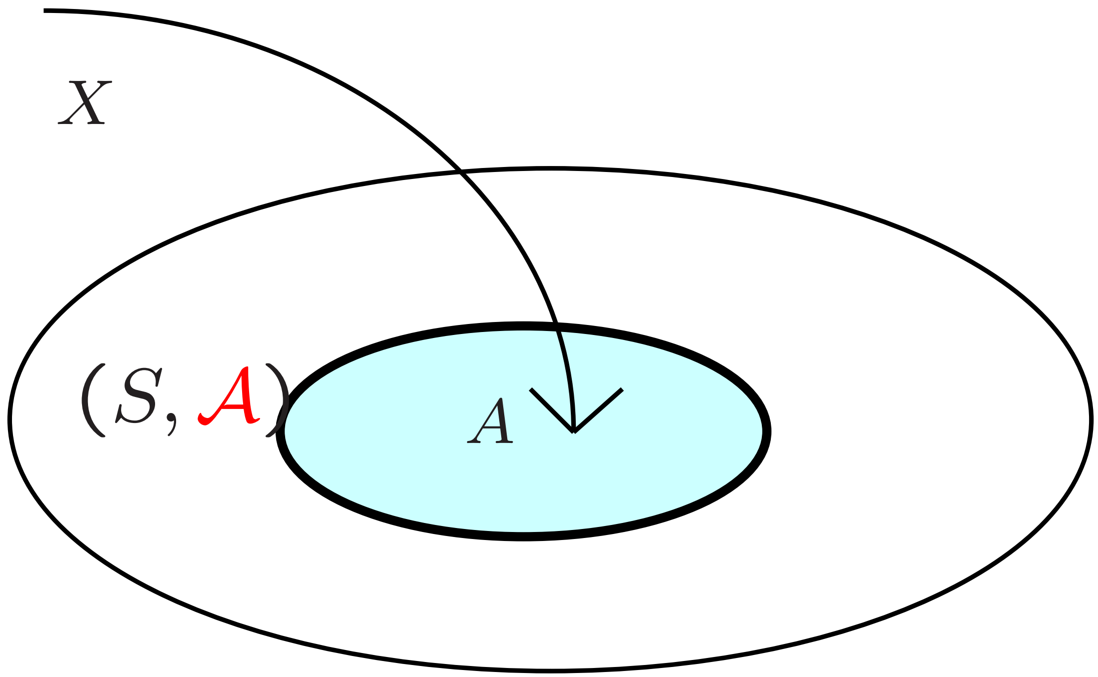
auch deren "Vereinigung" ("Oder-Ereignis") $\cup_k E_k$

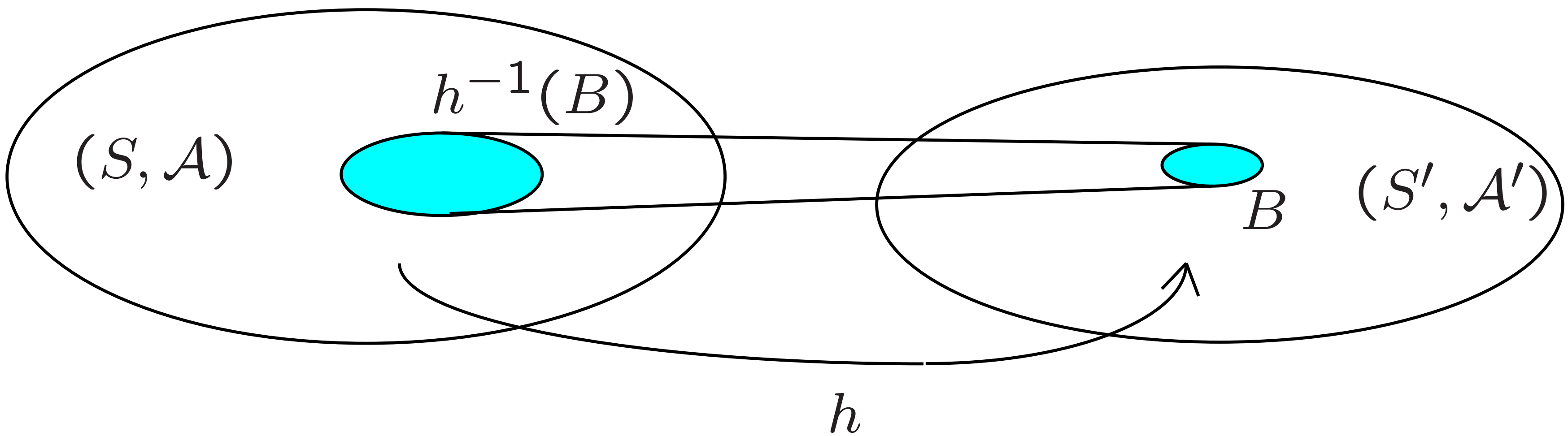
Sei ab jetzt $\mathcal{F}$ *irgendeine* Kollektion von Ereignissen

mit den Eigenschaften (1)-(3).

Wir nennen $\mathcal{F}$ das (zugrundeliegende) *Ereignisfeld*

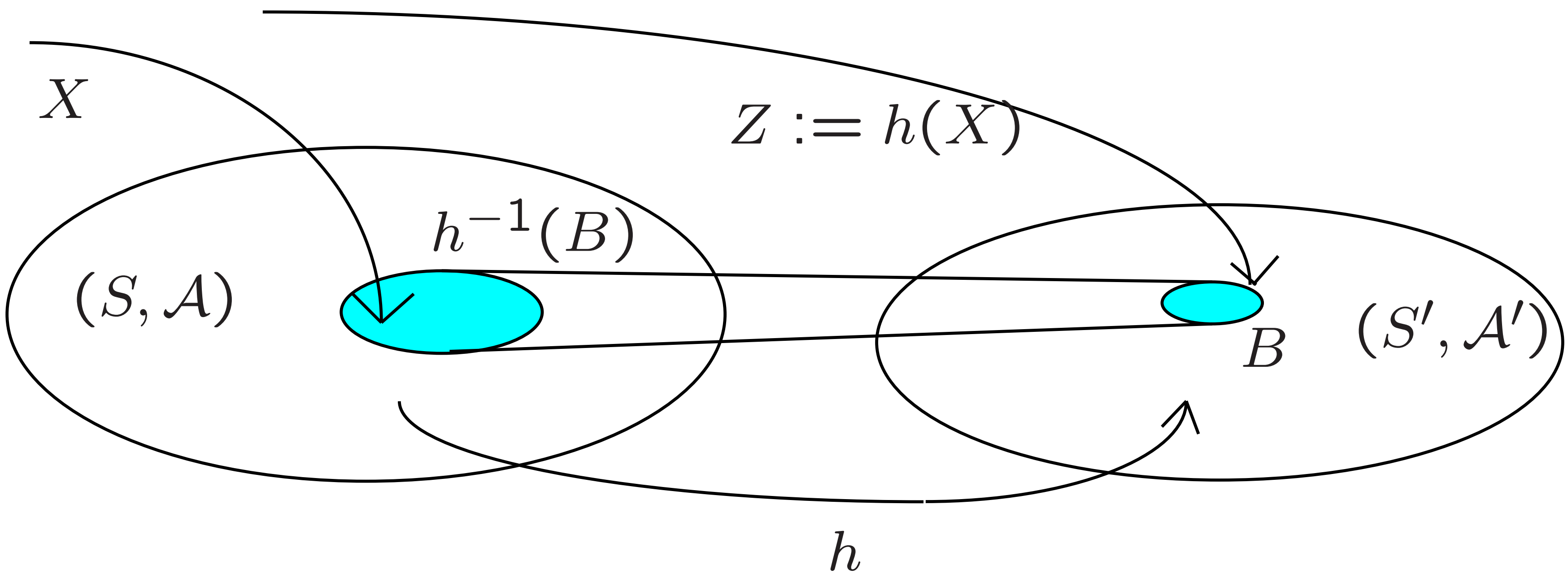
und betrachten dazu Zufallsvariable $X$ mit $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$.


$X$
$(S, \mathcal{A})$
$A$




Definition: $h : S \to S'$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ *messbar* $:\Longleftrightarrow$

$h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{A}'$.




$$\{h(X) \in B\} := \{X \in h^{-1}(B)\}$$

Für messbares $h$ und $Z := h(X)$ ist $\sigma(Z) \subset \sigma(X)$.

Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{G}$ des Ereignisfeldes $\mathcal{F}$ heißt *Teilfeld* (von Ereignissen), falls gilt:

(1) $\mathcal{G}$ enthält das sichere Ereignis $E_s$

(2) mit $E \in \mathcal{G}$ gilt auch $E^c \in \mathcal{G}$

(3) mit $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{G}$ gilt $\cup_k E_k \in \mathcal{G}$

Sei $\mathcal{G}$ ein Teilfeld. Eine Zufallsvariable $X$ heißt $\mathcal{G}$-messbar, wenn $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$ gilt.

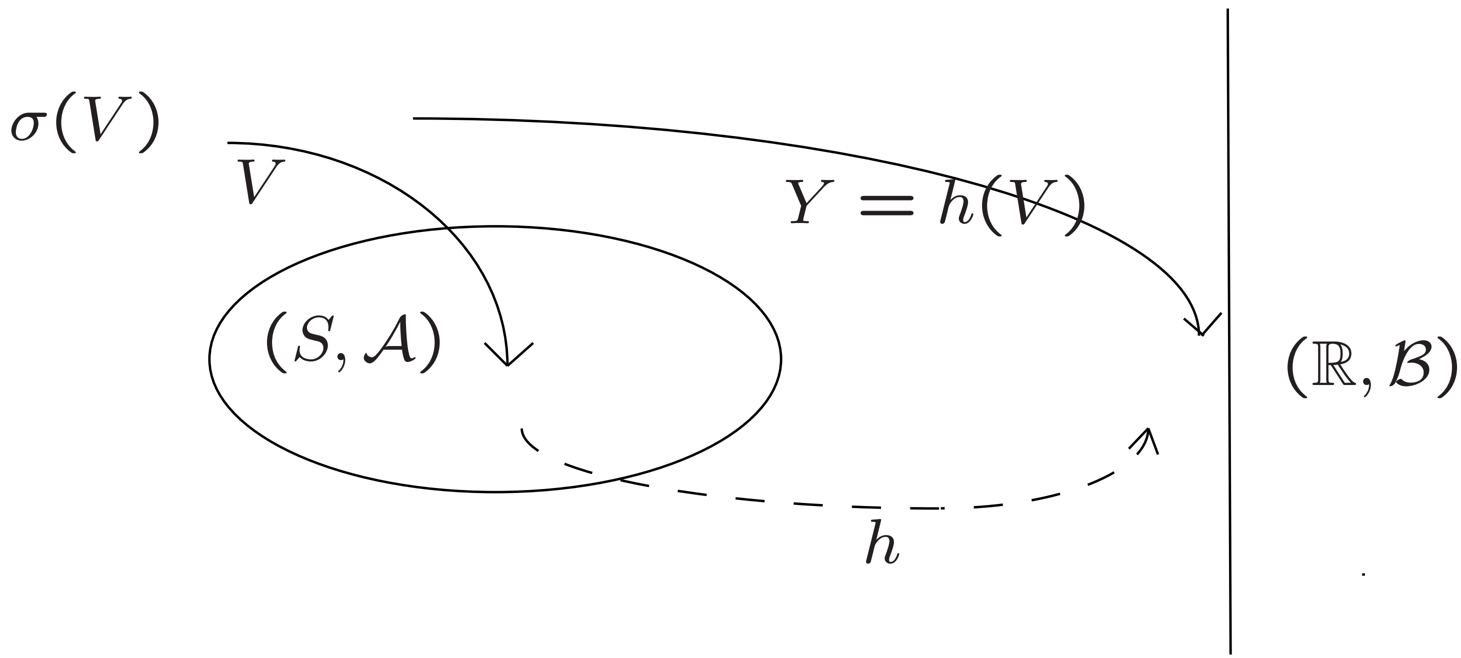
Beispiel: Für jede Zufallsvariable $V$ und messbares $h$ gilt:
$Y := h(V)$ ist $\sigma(V)$-messbar.

Die Umkehrung
gilt zumindest für reellwertige Zufallsvariable $Y$:

**Lemma** (Darstellung als Funktion mit Input $X$):

Jede rellwertige, $\sigma(V)$-messbare Zufallsvariable $Y$

ist von der Form $Y = h(V)$ für ein $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbares $h$.



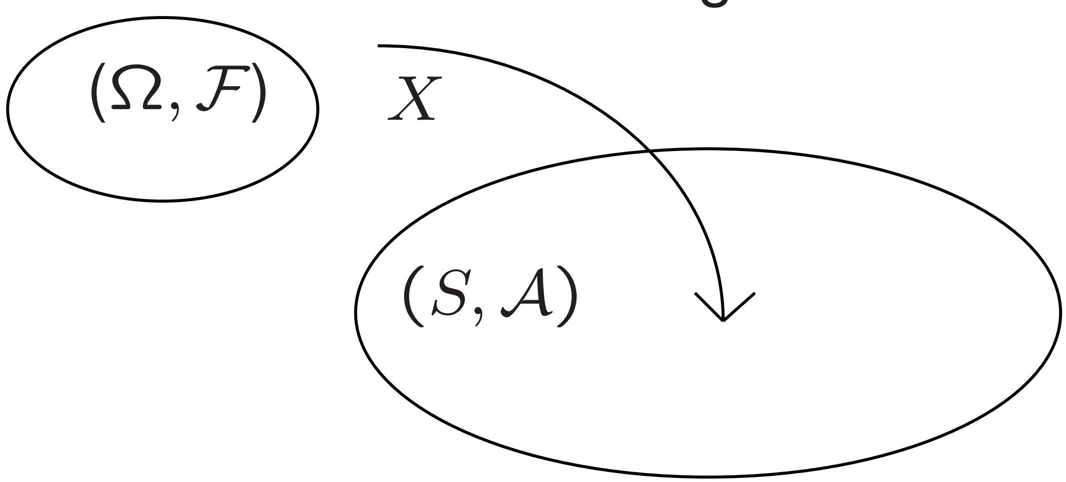
Im *Mengenmodell der Wahrscheinlichkeitstheorie*

betrachtet man das zugrundeliegende Ereignisfeld $\mathcal{F}$

als eine $\sigma$-Algebra auf einer Menge $\Omega$.

Die $S$-wertigen Zufallsvariablen $X$ werden dann modelliert durch

$\mathcal{F}$-$\mathcal{A}$-messbare Abbildungen von $\Omega$ nach $S$.



Die Theorie von Messbarkeit, Maß und Integral
ist ein Rückgrat der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Eine freundliche Einführung bietet das Buch:
M. Brokate, G. Kersting, Maß und Integral, Birkhäuser 2011 (EUR 18,90), auch in der Lehrbuch- und e-book Sammlung der UB sowie in der Mathe-Bibliothek erhältlich )