A. Wakolbinger, LV Stochastische Prozesse, SS 2016

Elementarer Zugang zur bedingten Erwartung - tema con variazioni

V sei eine Zufallsvariable mit beliebigem endlichen Wertebereich S,
X sei eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $\subset \mathbb{R}$.

Für jedes $a \in S$ mit $\mathbf{P}(V = a) > 0$ ist der *bedingte Erwartungswert von X gegeben $\{V = a\}$* definiert durch

$$h(a) := \frac{\mathbf{E}[XI_{\{V=a\}}]}{\mathbf{P}(V = a)}. \tag{1}$$

Sei also $h : S \to \mathbb{R}$ irgendeine Abbildung mit

$$h(a)\mathbf{P}(V = a) = \mathbf{E}[XI_{\{V=a\}}], \qquad a \in S. \tag{2}$$

Dazu gleichbedeutend ist, dass die Zufallsvariable $h(V)$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathbf{E}[h(V)I_{\{V=a\}}] = \mathbf{E}[XI_{\{V=a\}}], \qquad a \in S. \tag{3}$$

Wir nennen die so bestimmte Zufallsvariable $h(V)$ die *bedingte Erwartung von X gegeben V*.

Weil sich jede Zufallsvariable der Form $Z = \varphi(V)$ schreiben lässt als

$$\varphi(V) = \sum_{a \in S} \varphi(a) I_{\{V=a\}},$$

ist wegen der Linearität des Erwartungswertes die Bedingung (3) äquivalent zu

$$\mathbf{E}[h(V)\varphi(V)] = \mathbf{E}[X\varphi(V)] \qquad \forall \varphi : S \to \mathbb{R}. \tag{4}$$

Die Eigenschaft (4) werden wir in leicht modifizierter Form auch *im allgemeinen Fall* als Charakterisierung der bedingten Erwartung verwenden (siehe Buch Def. auf Seite 7). Interpretiert man für zwei Zufallsvariable Z_1, Z_2 die Zahl $\mathbf{E}[Z_1 Z_2]$ als deren *Skalarprodukt*, dann liest sich (4) so: *Die Zufallsvariable $h(V) - X$ ist orthogonal zu allen Zufallsvariablen der Form $\varphi(V)$*. Man bezeichnet deshalb die Eigenschaft (4) oft auch als die *Projektionseigenschaft der bedingten Erwartung.*

Jetzt aber zurück zu unserer elementaren Formel (1) im diskreten Fall:

Mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{ab} := \mathbf{P}(X = b | V = a)$$

bekommen wir

$$\mathbf{E}[XI_{\{V=a\}}] = \mathbf{P}(V = a) \sum_b bP_{ab},$$

also wird aus (1)

$$h(a) = \sum_b bP_{ab}, \quad a \in S,$$

$$h(V) = \sum_b bP_{Vb}. \tag{5}$$

In der ersten Vorlesung haben wir direkt gezeigt, dass die durch (5) definierte Zufallsvariable die Bedingung (4) erfüllt (vgl Buch, Bsp. auf Seite 4 unten). Hier ist das Argument nochmal:

$$\mathbf{E}[h(V)\varphi(V)] = \sum_a \mathbf{P}(V = a)\, h(a)\varphi(a)$$

$$= \sum_a \mathbf{P}(V = a) \sum_b bP_{ab}\, \varphi(a) = \sum_{a,b} \mathbf{P}(V = a)\, P_{ab}\, b\, \varphi(a)$$

$$= \sum_{a,b} \mathbf{P}(V = a, X = b) b\, \varphi(a) = \mathbf{E}[X\varphi(V)].$$