Zurückspielen des Stoppsatzes (Satz 1.10) auf geordnete Stoppzeiten:

Der Stoppsatz besagt: Sei (X_n) ein $\mathbb{F}$-Supermartingal, und seien S, T zwei $\mathbb{F}$-Stoppzeiten, mit $T \le c$ f.s. für ein $c < \infty$. Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] \le X_{S \wedge T} \text{ f.s.}$$

Für Martingale gilt f.s. Gleichheit.

Im Buch findet sich dafür ein eleganter, kurzer Beweis. Weil es aber auf den ersten Blick verwundern könnte, dass man hier so ohne weiteres ohne die Forderung der Unbeschränktheit von S auskommt schadet es nicht, auch hier noch einmal die Heuristik zu pflegen und sich zu überlegen, wie man die Aussage auf den (intutiveren) Fall $S \le T$ zurückspielen kann. Gerne greife ich dazu eine Anregung auf, die von Jonathan Brast gleich nach der gestrigen Vorlesung kam: man sollte bei der Prognose von X_T bedingt unter der S-Vergangenheit vorneweg an die Fallunterscheidung $\{S \le T\}$ und $\{S > T\}$ denken. Dies legt nahe, die folgende Gleichungskette zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] &= \mathbf{E}[X_T I_{\{S \le T\}} \mid \mathcal{F}_S] + \mathbf{E}[X_T I_{\{S > T\}} \mid \mathcal{F}_S] \\
&= I_{\{S \le T\}} \mathbf{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] + \mathbf{E}[X_{S \wedge T} I_{\{S > T\}} \mid \mathcal{F}_S] \\
&= I_{\{S \le T\}} \mathbf{E}[X_T \mid \mathcal{F}_{S \wedge T}] + X_{S \wedge T} I_{\{S > T\}} \\
&\le I_{\{S \le T\}} X_{S \wedge T} + X_{S \wedge T} I_{\{S > T\}} = X_{S \wedge T} \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

Bei der dritten Gleichheit verwenden wir, dass für eine $\mathcal{F}_S$-messbare Zufallsvariable Y die ZV $Y I_{\{S \le T\}}$ messbar ist bzgl. $\mathcal{F}_{S \wedge T}$. In der Tat gilt für $E \in \mathcal{F}_S$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(E \cap \{S \le T\}) \cap \{S \wedge T = n\} = E \cap \{n \le T\} \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Also ist $E \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.
Beim $\le$ in der 4. Formelzeile verwenden wir die (wie im Buch S. 26 zu beweisende) Version des Stoppsatzes, jetzt für die beiden Stoppzeiten $S \wedge T$ und T.

Ich empfehle nicht, das elegante Argument im Buch durch diesen Weg zu ersetzen. Allerdings denke ich, dass die obige Überlegung "ergänzenden Nährwert" hat, und ich habe sie auch deshalb heir aufgenommen, weil ich mich sehr darüber freue, wenn in der Vorlesung so lebendig mitgedacht wird.