Teleskopieren zwischen zwei Stoppzeiten: Der Kern des Beweises des elementaren Stoppsatzes und des Satzes über die gestoppten (Super-)Martingale

Wir rekapitulieren zuerst, was wir unter der Zufallsvariablen X_T verstehen wollen, wenn T eine $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$-wertige Zufallvariable und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\mathbb{S}$-wertigen Zufallsvariablen ist ($(\mathbb{S}, \mathcal{A})$ ist dabei ein beliebiger messbarer Raum).
Die Zufallsvariable X_T ist dann *auf dem Ereignis* $\{T < \infty\}$ *definiert* durch

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} := \{X_n \in B\} \cap \{T = n\}, \qquad B \in \mathcal{A},\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Salopp kann man das (wie im Buch geschehen) auch schreiben als $X_T := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} X_n I_{\{T=n\}}$ (denn obschon man $\mathbb{S}$-wertige Zufallsvariable nicht addieren kann, wenn $\mathbb{S}$ keine lineare Struktur hat, kommen sich hier die Summanden ja gar nicht in die Quere). Hat man zusätzlich auch noch eine weitere Zufallsvariable X_∞ zur Verfügung, dann kann man die Definition erweitern durch $\{X_T \in B\} \cap \{T = \infty\} := \{X_\infty \in B\} \cap \{T = n\}$. Liebhaber des kleinen omega denken einfach an $(X_T)(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$.

Jetzt aber weg von den Knochen, hin zum Fleisch (das darf ich auch als "Fast-Vegetarier" sagen): Der folgende Satz liefert den Kern der Beweise sowohl von Satz 1.8 (dem Satz über die gestoppten (Super-)Martingale; man setze dazu einfach $S := 0$) als auch von Satz 1.7 (dem Elementaren Stoppsatz; man betrachte dazu einfach die Folgerung $0 = \mathbf{E}[V_0] =$ (bzw. $\ge$) $\mathbf{E}[V_n] = \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[X_S]$ für hinreichend großes n.) Der folgende Satz bekommt deshalb hier die Ehrennumer 1.8*.

Satz 1.8*. Seien S, T zwei Stoppzeiten mit $0 \le S \le T$. Sei (X_n) ein (Super-)Martingal. Dann ist

$$V_n := X_{n\wedge T} - X_{n\wedge S}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ein (Super-)Martingal.[1]

Korollar: Mit $S := 0$ ergibt sich daraus sofort der Satz 1.8 über die gestoppten (Super-)Martingale: *Ist (X_n) ein (Super-)Martingal und T eine Stoppzeit, dann ist auch $(X_{n\wedge T})$ ein (Super-)Martingal.*

Beweis von Satz 1.8*: Zuerst das "Heureka": $V_n = X_{n\wedge T} - X_{n\wedge S} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < S \\ X_n - X_S & \text{für } S \le n < T. \\ X_T - X_S & \text{für } n \ge T. \end{cases}$

Also entsteht (V_n) durch Wetten mit Einsatz $+1$ auf die Zuwächse von (X_n) zwischen den Zeiten S und T. Nach Lemma 1.4 sollte (V_n) also ein (Super-)Martingal sein. In der Tat, hier ist das formale Argument:

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{i=(n\wedge S)+1}^{n\wedge T} (X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{S+1\le i\le T\}}(X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{S\le i-1<T\}}(X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} H_{i-1}(X_i - X_{i-1}) \end{aligned}$$

mit $H_n := I_{\{S\le n<T\}}$, $n \ge 0$. Wegen $\{S \le n\} \cap \{T \le n\}^c \in \mathbb{F}_n$ ist (H_n) $\mathbb{F}$-adaptiert. Überdies ist $H_n \ge 0$.
Somit ist nach dem Lemma über das Wetten auf (Super-)Martingalzuwächse (Lemma 1.4) (V_n) ein (Super-)Martingal. $\square$

[1] Man beachte: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind $S \wedge n$ und $T \wedge n$ endliche Stoppzeiten. Daher sind die Zufallsvariablen $X_{n\wedge T}$ und $X_{n\wedge S}$ nicht nur auf einem Teilereignis, sondern "sicher" definiert.