Prof. Dr. A. Wakolbinger SoSe 2016
Tutorin: Ute Lenz

Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 8. Juni 2016 vor der Vorlesung

12. *Moranmodell mit Zweiwegmutation.* a) Bestimmen Sie die Generatormatrix (“Q-Matrix”) $Q^{(N)}$ des Moran-(N)-Typ 1-Anteilsprozesses mit Zweiwegmutation und Mutationsraten $\theta_1/2$ und $\theta_2/2$.
b) Bestimmen Sie für $f \in C^2([0,1])$, $y_N \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$, $y_N \to y \in (0,1)$, den Grenzwert $\lim_{N\to\infty} Q^{(N)} f(y_N)$.

13. *Eine Dualität unter Mutation.* Es sei

$$G := \frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\theta_1}{2}(1-x) - \frac{\theta_2}{2}x\right)\frac{d}{dx}$$

der Generator der Wright-Fisher-Diffusion X mit Zweiweg-Mutationsraten $\theta_1/2$ und $\theta_2/2$. (Dabei steht X für den Anteil von Typ 1.)
a) Berechen Sie $Gf(x)$ für $f(x) := x^n$.
b) Wir betrachten ein mit n Teilchen startendes System, bei dem im Zustand “k Teilchen sind vorhanden”
– jedes Paar von Teilchen mit Rate 1 zu einem Teilchen verschmilzt
– jedes Teilchen mit Rate $\frac{\theta_1}{2}$ verschwindet
– die gesamte Teilchenkonfiguration mit Rate $k\frac{\theta_2}{2}$ “auf den Friedhof springt”.
Der Anzahlprozess $(N_r)_{r\geq 0}$ des Teilchensystems ist damit eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0 \cup \Delta$, mit Sprungrate $\binom{k}{2} + \frac{\theta_1}{2}k$ von k nach $k-1$, und Sprungrate $k\frac{\theta_2}{2}$ von k nach Δ, wobei der *Friedhofszustand* Δ absorbierend ist.
Begründen Sie die Beziehung $\mathbf{E}_x[X_t^n] = \mathbf{E}_n[x^{N_t}; N_t \neq \Delta]$ für $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$.

14. *Yule-Prozess.* Es sei $Y = (Y_t)$ ein Standard-Yule-Prozess.
a) Warum ist die Zeit, zu der Y die Größe k erreicht, so verteilt wie das Maximum von $k-1$ unabhängigen, standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen?
b) Beweisen Sie mittels a), dass Y_t geometrisch verteilt ist zum Parameter e^{-t}.
c) Warum ist $(Y_t/e^t)_{t\geq 0}$ ein Martingal?

15. *Gamma und Beta.* Es seien θ_1, θ_2 positive Zahlen. Die ZV'en G_i seien Gamma(θ_i)-verteilt ($i = 1,2$), G_1 und G_2 seien unabhängig. Außerdem gelte: G sei Gamma($\theta_1 + \theta_2$)-verteilt, B sei Beta(θ_1, θ_2)-verteilt (d.h. B hat die Dichte $\frac{\Gamma(\theta_1+\theta_2)}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} u^{\theta_1-1}(1-u)^{\theta_2-1}du$, $u \in (0,1)$), und G und B seien unabhängig. Zeigen Sie $(G_1 + G_2, \frac{G_1}{G_1+G_2})$ ist so verteilt wie (G, BG).