Prof. Dr. A. Wakolbinger
Tutorin: Ute Lenz SoSe 2016

Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2016 vor der Vorlesung

8. *Die Gesamtlänge des Kingman-n-Coalescent.* In einem Kingman-n-Coalescent sei L_n die Summe aller Astlängen (von den n Blättern zurück zum Zeitpunkt der Verschmelzung der letzten beiden Linien).
Zeigen Sie: $\frac{1}{2}L_n$ ist so verteilt wie das Maximum von $n-1$ unabhängigen standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst; $\frac{1}{2}L_n$ ist so verteilt wie $E_1 + \frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{3}E_3 + \cdots \frac{1}{n-1}E_{n-1}$, wobei E_1, E_2,... unabhängige, standard-exponentialverteilten Zufallsvariable sind.

9. *Sind zwei zufällig gewählte Individuen vom gleichen Typ?* X sei eine (standard) Wright-Fisher Diffusion mit Start in x. Berechnen Sie $2\mathbf{E}_x[X_t(1-X_t)]$, d.h. die erwartete Heterozygotie (bei anfänglicher Typfrequenz $X_0 = x$) zur (evolutionären) Zeit t.

10. *Die erwartete Zeit bis zur Fixierung.* Wieder sei X eine (standard) Wright-Fisher Diffusion mit Start in x, und g sei eine reellwertige, beschränkte Funktion auf $[0,1]$ mit

$$(*) \quad g(0) = g(1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}x(1-x)g''(x) = -1.$$

a) Warum ist $g(X_t) + t$, $t \geq 0$, ein Martingal?
b) Es sei T_{fix} die *Fixierungszeit* von X, d.h. die erste Zeit, zu der X die Menge $\{0,1\}$ trifft. Begründen Sie mit dem Stoppsatz für Martingale, dass $\mathbf{E}_x[T_{\text{fix}}] = g(x)$ gilt.
c) Finden Sie die Lösung von $(*)$.
d) Berechnen Sie die erwartete Fixierungszeit xon X.

11. *Ein Quasigleichgewicht für den Moran-Anzahlprozess.*
Zur Erinnerung: Der Moran(N)-Zählprozess (Z_t) ist eine Markovkette auf $\{0,1,\dots,N\}$ mit Absorption in 0 und N, und Sprungraten $\frac{1}{2}k(N-k)$ von k nach $k-1$ und von k nach $k+1$. (In der Generatormatrix Q von Z steht also in der k-ten Zeile sowohl in der $(k-1)$-ten Spalte als auch in der $(k+1)$-ten Spalte der Eintrag $\frac{1}{2}k(N-k)$ und in der k-ten Spalte der Eintrag $-k(N-k)$.)

Z_0 sei uniform verteilt auf $\{1,\dots,N-1\}$. Berechnen Sie mithilfe der Vorwärtsgleichung $\dot{\rho} = \rho Q$ für jedes feste $t > 0$ die Verteilung ρ_t von Z_t . (*Hinweis: Versuchen Sie's mit dem Ansatz* $\rho_s(k) = ce^{-s}$, $k = 1,\dots,N-1$.)
Wie ist Z_t verteilt, gegeben das Ereignis $\{Z_t \in \{1,\dots,N-1\}\}$?
Was ist die Verteilung der zufälligen Zeit $\tau := \inf\{s > 0 : Z_s \in \{0,N\}\}$?