Prof. Dr. A. Wakolbinger SoSe 2016
Tutorin: Ute Lenz

Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik"

Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, 27. April 2016 vor der Vorlesung

1. Wir betrachten ein Cannings-Modell zur Populationsgröße N, mit nicht-trivialer Kinderzahlverteilung (d.h. $\mathbf{P}(\mathcal{N} = (1,\dots,1)) < 1$).
a) Zeigen Sie: Mit W'keit 1 dauert es nur endlich viele Generationen, bis alle Individuen von einem einzigen Individuum in der Anfangsgeneration abstammen.
b) Es sei `a` ein bestimmter Typ (ein "Allel"), das entlang der Abstammungslinien weitervererbt wird, und X_t sei der Anteil der Individuen mit Typ `a` in Generation t. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ (i) eine Markovkette und (ii) ein Martingal ist.
c) Der Anteil des Typs `a` in der Generation 0 sei p. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Typ `a` *fixiert* in dem Sinn, dass schließlich alle Individuen von diesem Typ sind.

2. Sei $N \in \mathbb{N}$ und ν eine $([N], N)$-Besetzung, d.h. ein Vektor von Besetzungszahlen von N Plätzen durch N Individuen. Dazu definieren wir die Abbildung $a_\nu : [N] \mapsto [N]$ wie folgt:

$$a_\nu(i) = j \quad \text{für} \sum_{k=1}^{j-1} \nu_k < i \leq \sum_{k=1}^{j} \nu_k, \qquad i = 1,\dots,N.$$

Für jedes so entstehende $a : [N] \mapsto [N]$ definieren wir seine verallgemeinerte Inverse durch

$$a^{-1}(j) := \min\{i \in [N] : a(i) \geq j\},\, j \in [N], \text{ mit } \min\emptyset := 0, \quad a^{-1}(0) := 0.$$

(i) Illustrieren Sie anhand des Beispiels $N = 10$ und $\nu = (0,5,0,0,1,1,2,0,1)$, dass man ν als Vektor der Größen der Urbilder von a_ν sowie als Vektor der Größen der Sprünge von a_ν^{-1} zurückgewinnt.
(ii) Für $N = 10$ betrachten wir die beiden Besetzungen ν und ρ, mit ν wie in (i) und $\rho := (0,0,3,0,2,0,0,4,0,0,1)$. Prüfen Sie nach, dass $(a_\nu \circ a_\rho)^{-1} = a_\rho^{-1} \circ a_\nu^{-1}$ gilt.
(iii) Wir interpretieren jetzt ν und ρ aus (ii) als Realisierungen der Kinderzahlvektoren in der ersten und in der zweiten Generation in einem Cannings-Prozess, mit der in (i) beschriebenen Ahnenwahl. Zeichnen Sie die so entstehende Genealogie entlang der beiden Generationen.[1]

3. Sei $N \in \mathbb{N}$. Aus einer Folge von (unabhängigen, identisch verteilten) Cannings-Kinderzahlvektoren $\mathcal{V}^{(0)}, \mathcal{V}^{(1)}$ ... zur Populationsgröße N bauen wir einen stochastischen Prozess $Z^{(N)} =: Z = (Z_0, Z_1, \dots)$, rekursiv definiert durch $Z_{m+1} := \sum_{j=1}^{Z_m} \mathcal{V}_j^{(m)}$. Damit gibt Z_m die Anzahl der Nachkommen in Generation m von Z_0 Ahnen in Generation 0 an.

Zeigen Sie mit $\sigma^2 := \mathbf{Var}[\mathcal{V}_1^{(0)}] \cdot \frac{N}{N-1}$:

$$\mathbf{Var}(Z_{m+1} | Z_m = k) = \frac{1}{N} \sigma^2 k (N-k)$$

und mit $X_t^{(N)} := \frac{1}{N} Z_{\lfloor tN \rfloor}$, $\Delta t := \frac{1}{N}$:

$$\mathbf{E}[(X_{t+\Delta t}^{(N)} - X_t^{(N)})^2 | X_t^{(N)}] = \Delta t \cdot \sigma^2 X_t^{(N)} (1 - X_t^{(N)}).$$

[1] Diese Konstruktion ist ein diskretes Analogon zum *flow of bridges* in *J. Bertoin, J.F. Le Gall (2003), Stochastic flows associated to coalescent processes I., Probab. Theory Related Fields 126:261-288*, siehe auch Abschnitt 2.3.2 (spezialisiert auf eine nicht räumliche Situtaion) in *A. Véber, A. W., The spatial Lambda-Fleming-Viot process: an event-based construction and a lookdown representation*, Ann. Insit. H. Poincaré Probab. Statist. 51 (2015), 570-598, `http://arxiv.org/pdf/1212.5909v2.pdf`