A. Wakolbinger, Stochastische Modelle der Populationsgenetik, SoSe 2016

Ergänzungsblatt: Ein Blick auf Martingalprobleme

Wir hatten in der Vorlesung die standard Wright-Fisher Diffusion definiert als stetiges $[0,1]$-wertiges Martingal X mit der Eigenschaft, dass auch $X_t^2 - \int_0^t X_s(1-X_s)ds$, $t \ge 0$, ein Martingal ist. Anders ausgedrückt: Die standard Wright-Fisher Diffusion ist ein stetiges $[0,1]$-wertiges Martingal X mit quadratischer Variation $\int_0^t X_s(1-X_s)ds$, $t \ge 0$. Wir hatten auch gesehen, dass diese Forderung die Verteilung von X (bei gegebener Startverteilung) eindeutig festlegt.

Die erste Charaktarisierung lässt sich auch so fassen: X ist ein stetiger $[0,1]$-wertiger Prozess, sodass jeweils für $f(x) := x$ bzw. $f(x) := x^2$ die Prozesse

$$M_t^f := f(X_t) - \int_0^t X_s(1-X_s)\frac{1}{2}f''(X_s)ds, \quad t \ge 0,$$

Martingale sind. Aus der Itô- Formel folgt übrigens, dass dann M^f ein Martingal ist sogar für jedes zweimal stetig differenzierbare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dies passt in das folgende allgemeine Szenario:

S sei ein separabler, vollständiger metrischer Raum. (Im Beispiel der WF-Diffusion ist $S = [0,1]$.) $\mathcal{M}_b(S)$ bzw. $\mathcal{C}_b(S)$ bezeichnen die Räume der beschränkten messbaren bzw. stetigen Funktionen von S nach $\mathbb{R}$.

Sei $Q : \mathcal{D}(\subset \mathcal{C}_b(S)) \to \mathcal{M}_b(S)$ ein linearer Operator und X ein S-wertiger stochastischer Prozess, dessen Pfade rechtsseitig stetig sind und linke Limiten besitzen.

Man sagt, dass $(X, \mathbf{P})$ *das Martingalproblem* $(Q, \mathcal{D})$ *löst*, falls für jedes $f \in \mathcal{D}$ gilt:

$$(*) \qquad f(X_t) - \int_0^t Qf(X_s)ds, \quad t \ge 0, \quad \text{ist (unter } \mathbf{P}) \text{ ein Martingal.}$$

Man sagt, *das Martingalproblem* $(Q, \mathcal{D})$ *sei eindeutig*, falls für je zwei Lösungen $(X, \mathbf{P})$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathbf{P}})$ mit $X_0 \overset{d}{=} \tilde{X}_0$ gilt: $X \overset{d}{=} \tilde{X}$.

Satz (Kersting, Skript "Schwache Konvergenz und Martingalprobleme", Satz 2.8): *$\mathcal{D}$ sei dicht in $\mathcal{C}_b(S)$ bzgl. des Supremumsabstands, und $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_b(S)$, $Q_n : \mathcal{D} \to \mathcal{M}_b(S)$ seien linear. Weiter gelte:*

i) Das Martingalproblem $(Q, \mathcal{D})$ ist eindeutig.

ii) $\sup_x |Q_n f(x) - Qf(x)| \to 0$ *für alle* $f \in \mathcal{D}$,

iii) $(X^n, \mathbf{P}^n)$ *seien Lösungen der Martingalprobleme $(Q_n, \mathcal{D})$ mit der Eigenschaft: Für alle ε, t gibt es ein kompaktes $K \subset S$, so dass für alle n*

$$\mathbf{P}^n(X_s^n \in K \text{ für alle } s \le t) \ge 1 - \varepsilon.$$

Konvergiert dann X_0^n in Verteilung, so konvergiert $(X^n, \mathbf{P}^n)$ in Verteilung gegen eine Lösung $(X, \mathbf{P})$ des Martingalproblems $(Q, \mathcal{D})$. (Dabei wird auf dem Raum der rechtsseitig stetigen Pfade mit linken Limiten die sogenannte Skorokhod-Metrik zugrunde gelegt.)

Im Beispiel der WF-Diffusion ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben, die Voraussetzung (ii) erfüllt für die Generatoren $Q^{(N)}$ der Moran(N)-Anteilsprozesse $X^{(N)}$, und (iii) ist dort klarerweise erfüllt mit $K := [0,1]$. Weil die Prozesse $X^{(N)}$ Sprünge nur der absoluten Größe $1/N$ haben, folgt aus der Verteilungskonvergenz der $X^{(N)}$ bzg. der Skorokhod-Metrik, dass der Limesprozess X f.s. stetige Pfade hat.