Vorlesung 4a

Geometrische Verteilung

und

Poissonverteilung

Warten auf den ersten Erfolg

beim Münzwurf:

Die geometrische Verteilung

Sei $(Z_1, Z_2, \ldots)$ ein fortgesetzter Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$, d.h.

$$\mathbf{P}\{Z_1 = z_1, \ldots, Z_t = z_t\} = p^k (1-p)^{t-k}$$

für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle 0-1 Folgen $z_1, \ldots, z_t$ mit k Einsen und $t-k$ Nullen.

$$T := \inf\{j \mid j \in \mathbb{N}, Z_j = 1\}$$

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges.

Wie sieht sie Verteilung von T aus?

$$\mathbf{P}\{T = t\} = ?$$

$$\{T = t\} = \{Z_1 = 0, \ldots Z_{t-1} = 0,\ Z_t = 1\}$$

Also

$$\mathbf{P}\{T = t\} = \mathbf{P}\{Z_1 = 0, \ldots Z_{t-1} = 0,\ Z_t = 1\}$$

$$= q^{t-1}\, p$$

mit $q := 1 - p$.

Alternativ:

$$\{T \geq t\} = \{Z_1 = 0, \ldots, Z_{t-1} = 0\}$$

Also

$$\mathbf{P}\{T \geq t\} = q^{t-1}.$$

$$\mathbf{P}\{T = t\} = q^{t-1}\, p$$

$$\mathbf{P}\{T \geq t\} = q^{t-1}$$

Das passt zusammen:

$$\mathbf{P}\{T = t\} = \mathbf{P}\{T \geq t\} - \mathbf{P}\{T \geq t+1\}$$

$$\begin{aligned} &= q^{t-1} - q^{t} \\ &= q^{t-1}\,(1-q) \\ &= q^{t-1}\, p. \end{aligned}$$

Definition

Sei $p \in (0,1)$. Eine Zufallsvariable T mit Zielbereich $\mathbb{N}$ heißt

geometrisch verteilt mit Parameter p,

kurz Geom(p)-verteilt,

wenn

$$\mathbf{P}\{T \geq t\} = q^{t-1}, \quad t = 1, 2 \ldots\ ,$$

mit $q := 1 - p$.

$$\mathbf{E}[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit p kommt im Mittel jedes $(1/p)$-te Mal ein Erfolg.

Also wird gelten (vgl Vorlesung 3b):

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}.$$

Das beweist man auch schnell

mit dem folgenden nützlichen und hübschen

Lemma

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\{X \geq i\}$$

Beweis.

$\nu(j)$ seinen die Verteilungsgewichte von X.

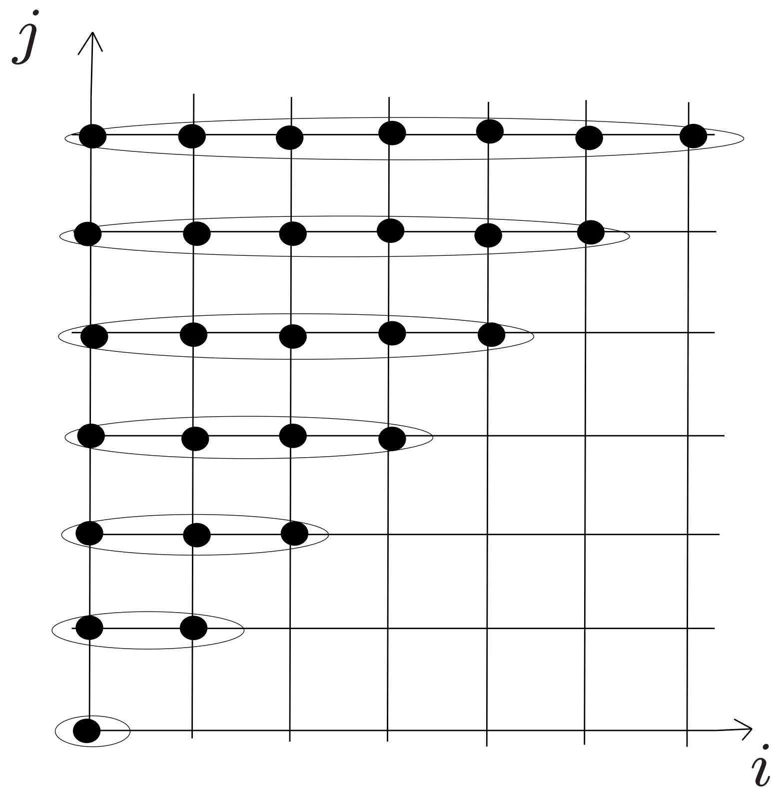
$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j\nu(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j} \nu(j)$$

$$\sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\{X \geq i\} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j=i}^{\infty} \nu(j)$$

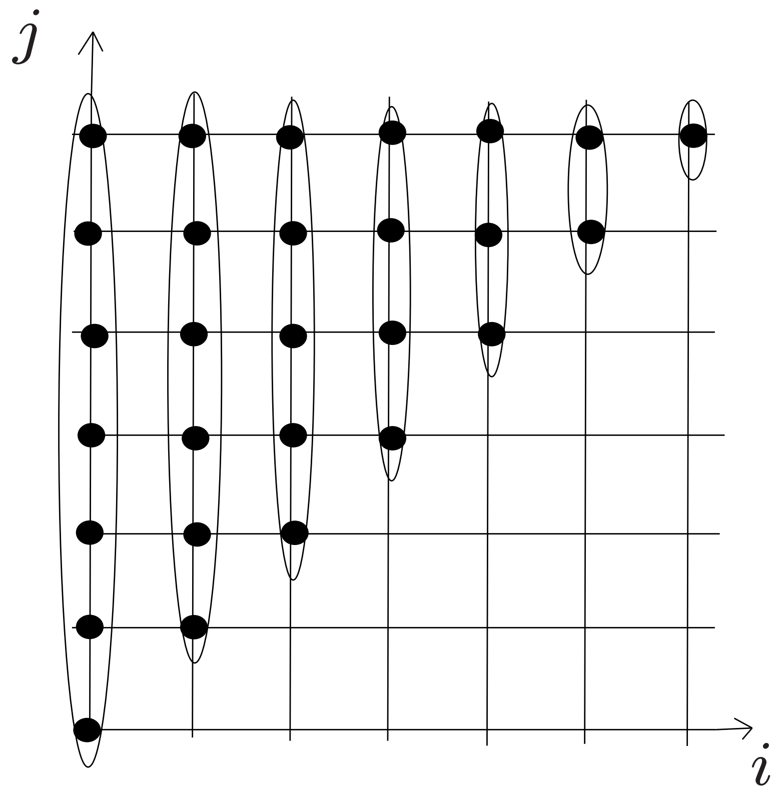
Warum ist das gleich?

Wie sieht man die Gleichheit

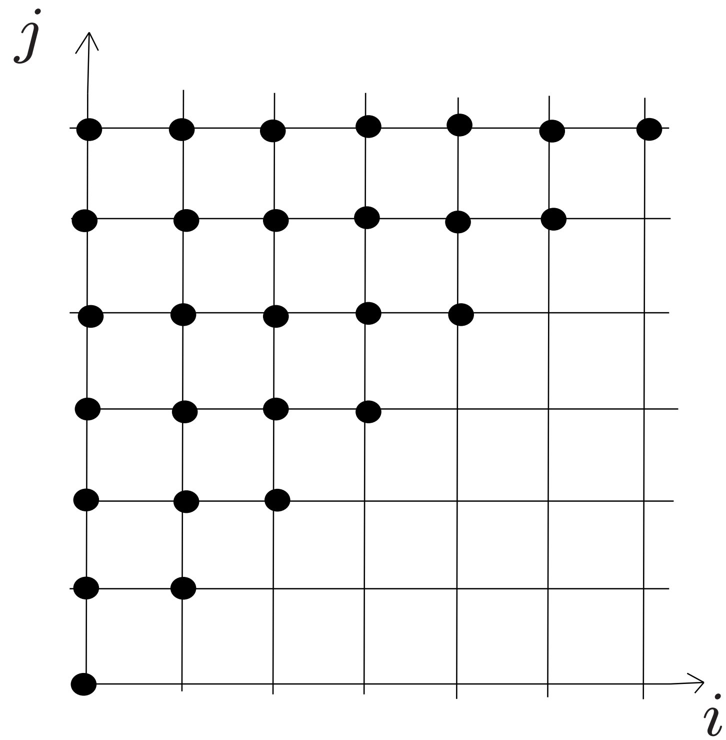
$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=1}^{j}\nu(j) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=i}^{\infty}\nu(j) \qquad ?$$



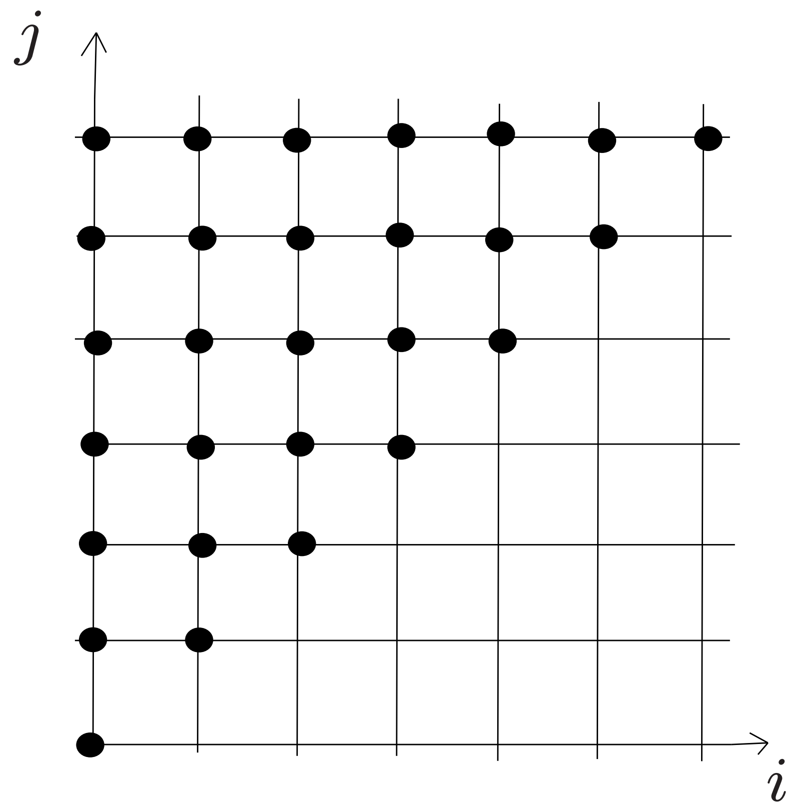
$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j} \nu(j)$$



$$\sum_{i \geq 1} \sum_{j=i}^{\infty} \nu(j)$$



Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summation an



$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=1}^{j}\nu(j)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=i}^{\infty}\nu(j)$$

Fazit

Für eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable T ergibt sich:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\{X \geq i\} = \sum_{i \geq 1} q^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

$$\boxed{\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}}$$

Kleine Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?

Sei p eine kleine positive Zahl

und T eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable.

Was kann man über T aussagen,

außer dass es tendenziell groß ist?

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\mathbf{P}\{\widetilde{T} \geq t\} = \mathbf{P}\{T \geq \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\}$$

$$= \left(1 - p\right)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}$$

$$= \left(1 - p\right)^{\frac{1}{p}\ p\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}$$

$$\approx (e^{-1})^t = e^{-t}.$$

Diese Tatsache formulieren wir als einen Grenzwertsatz:

Satz Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[X_n] \to \infty.$$

Dann gilt mit $n \to \infty$

$$\boxed{\mathbf{P}\Big\{\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big\} \to e^{-t}}$$

für alle $t \geq 0$.

Kleine Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie viele Erfolge gibt es bei vielen Versuchen?

Sei n eine große natürliche Zahl, $p = p_n$ eine kleine positive Zahl, und X_n eine Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable.

Man kann dann die Verteilungsgewichte von X_n approximativ als Funktion von $\mathbf{E}[X_n] = n\, p_n$ ausdrücken, wie der folgende Grenzwertsatz zeigt:

Satz (Gesetz der seltenen Ereignisse)

Sei $\lambda > 0$ und sei X_n, $n = 1, 2, \ldots$,

eine Folge von Bin(n, p_n)-verteilten Zufallsvariablen,

so dass für $n \to \infty$

$$\mathbf{E}[X_n] \to \lambda \,, \qquad \text{d. h. } p_n \sim \frac{\lambda}{n} \,.$$

Dann gilt für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\mathbf{P}\{X_n = k\} \to e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^k}{k!} \,.}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \; =$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (np_n)^k \cdot \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \cdot (1-p_n)^{-k} \; .$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \;=$$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (np_n)^k \cdot \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \cdot (1-p_n)^{-k}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \;=$$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \cdot (1-p_n)^{-k}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \; =$$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} (1-p_n)^{-k}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \;=$$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\to 1}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\to 1}$$

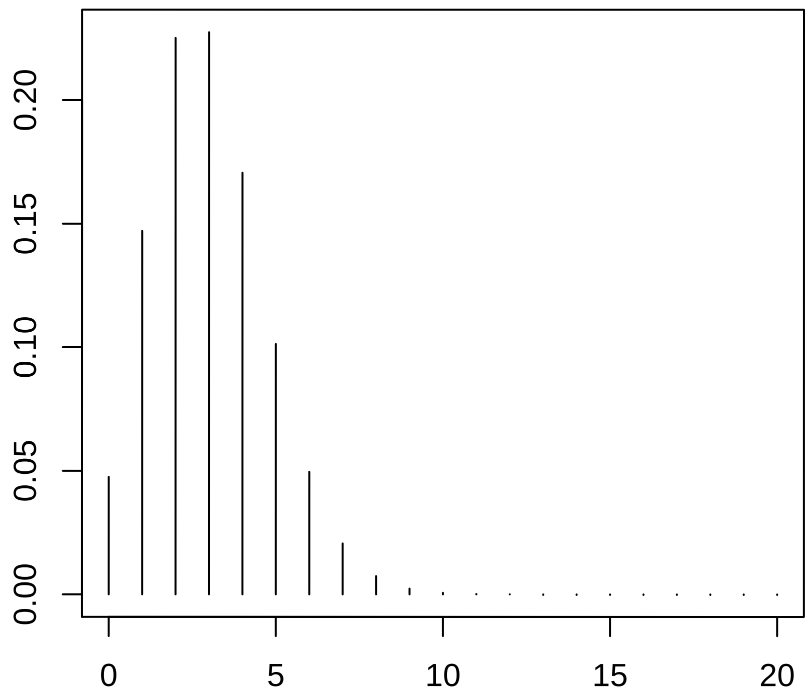
$$\to \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} . \qquad \square$$

Definition (Poissonverteilung)

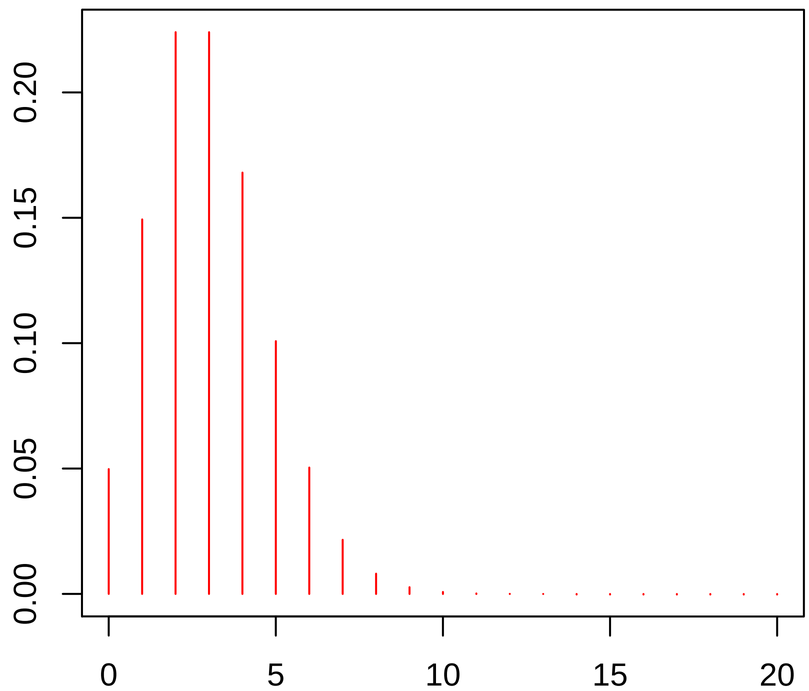
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{N}_0$ heißt *Poissonverteilt* mit Parameter λ, kurz Pois(λ)-verteilt, wenn

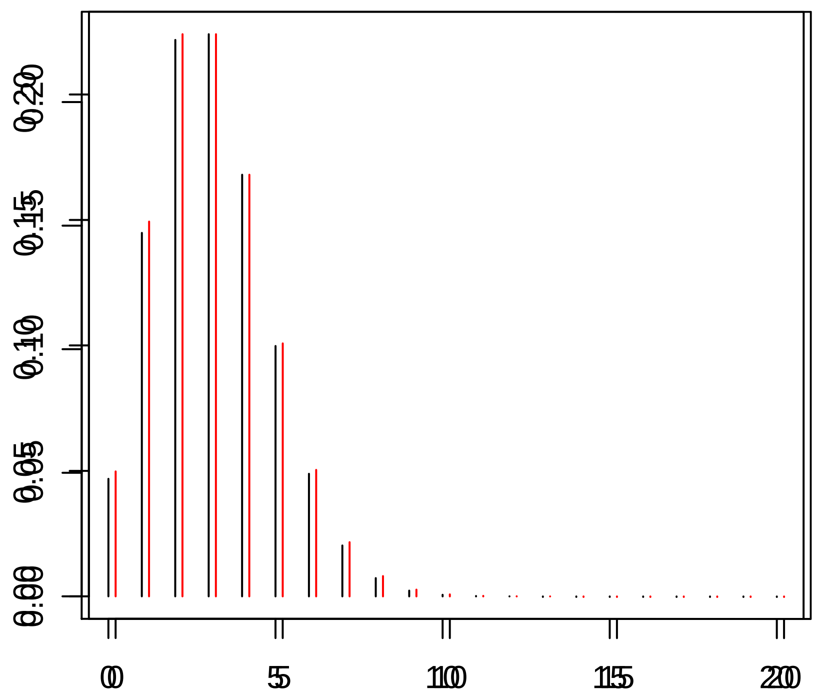
$$\boxed{\mathbf{P}\{X = k\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ .}$$



Binomialgewichte zu $n = 100$ und $p = 0.03$



Poissongewichte zum Parameter λ =3



0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
5
10
15
20

Satz.

Der Erwartungswert

einer Pois(λ)-verteilten Zufallsvariablen X ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Beweis:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot 1$$