Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 26. Juni 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

33. ***Summen von unabhängigen Zufallsvariablen.*** a) X sei Pois(α)-verteilt, Y sei Pois(β)-verteilt und X, Y seien unabhängig. Zeigen Sie: $X+Y$ ist Pois($\alpha+\beta$)-verteit.

b) $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und Exp(1)-verteilt, $T_i := X_1 + \ldots + X_i$, $i = 1, 2, \ldots$.
Berechnen Sie
(i) die gemeinsame Dichte $f(a_1, a_2, a_3, b)\, da_1\, da_2\, da_3\, db$, $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le b$, von (T_1, T_2, T_3, T_4),
(ii) die Dichte $f_4(b)\, db$, $b \ge 0$, von T_4,[1]
(iii) die gemeinsame Dichte $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)\, da_1 \cdots da_{n-1} db$, $0 \le a_1 \le \ldots \le a_{n-1} \le b$, von $(T_1, \ldots, T_n)$,
(iv) die Dichte $f_n(b)\, db$, $b \ge 0$, von T_n.

c) Gratulation! Sie haben soeben en passant (ohne vollständige Induktion) den Wert des Integrals $\int_0^\infty b^{n-1} e^{-b}\, db$ berechnet. Und dieser Wert ist …?

34. S. ***Die Elefanten begleiten uns.*** Wir machen jetzt die Angabe aus A 14 etwas lebensnäher. Die 5 Werte $1t, \ldots, 5t$ seien jetzt die Mittelwerte in den 5 Gewichtsgruppen, und die Standardabweichungen in diesen Gruppen seien 0.2, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.2 Tonnen. Berechnen Sie die Standardabweichung des Gewichtes eines rein zufällig aus der gesamten Herde gewählten Elefanten.

35. S. ***Schöne normale Welt.*** a) Wir betrachten die Zufallsvariable $Y = \beta X + R$, mit X $\mathrm{N}(0, \sigma_X^2)$-verteilt, R $\mathrm{N}(0, \sigma_R^2)$-verteilt, X und R unabhängig, $\beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie
(i) die bedingte Verteilung von Y gegeben $\{X = a\}$,
(ii) die bedingte Erwartung von Y gegeben X.

b) Z_1, Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Wir betrachten $Y := \sigma_1 Z_1$, $X := \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$.
(i) Bestimmen Sie die (im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers) beste (affin) lineare Vorhersage $\beta_1 X$ von Y. Warum ergibt sich hier $\beta_0 = 0$?
(ii) Sind $\beta_1 X$ und $Y - \beta_1 X$ (α) unkorreliert? (β)[2] unabhängig?

36. ***Münzwurf mit Unif*** $[0,1]$***-verteiltem Erfolgsparameter***. $U_0, U_1, \ldots, U_n$ seien unabhängige und Unif$[0,1]$-verteilte Zufallsvariable. Für $i = 1, \ldots, n$ setzen wir $Z_i := I_{\{U_i < U_0\}}$.

a) Warum fallen mit Wahrscheinlichkeit 1 alle $U_0, \ldots, U_n$ paarweise verschieden aus?

b) Es seien $R_0, R_1, \ldots R_n$ die aufsteigenden Ränge der $U_0, \ldots, U_n$, d.h. wir setzen $R_i = k$, wenn U_i das $(k+1)$-t kleinste der $U_0, \ldots, U_n$ ist.[3] Warum ist $\Pi := (R_0, R_1, \ldots, R_n)$ eine rein zufällige Permutation von $0, 1, \ldots, n$?

c) Sei $k \le n$. Wie wahrscheinlich ist es, dass U_0 das $k+1$-kleinste der $U_0, \ldots, U_n$ ist, gegeben dass U_0 das k-t kleinste der $U_0, \ldots, U_{n-1}$ ist?

d) Begründen Sie mithilfe des Transformationssatzes die folgende Aussage:
Für jedes stetige $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ und jedes $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ mit $a_1 + \cdots + a_n =: k$ ist

$$\mathbf{E}[g(U_0) I_{\{Z_1 = a_1\}} \cdots I_{\{Z_n = a_n\}}] = \int_0^1 g(p) p^k (1-p)^{n-k} dp.$$ [4]

e) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Münzwurf mit Unif $[0,1]$-verteiltem Erfolgsparameter der n-te Versuch ein Erfolg ist, gegeben man hatte $k-1$ Erfolge in den ersten $n-1$ Versuchen?

---

[1] Hinweis: Was ist für $b \ge 0$ das Volumen der Menge $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le b\}$?
[2] optional, dafür gibt's Sonderpunkte
[3] Wegen b) sind die R_i mit Wahrscheinlichkeit 1 wohldefiniert.
[4] Damit ist $(Z_1, \ldots, Z_n)$ so verteilt wie ein n-facher Münzwurf mit Unif $[0,1]$-verteiltem Erfolgsparameter, das ist die 2. Stufe eines Zufallsexperiments, in dem in der ersten Stufe ein in $[0,1]$ uniform verteiltes p und in der zweiten Stufe ein p-Münzwurf druchgeführt wird.