Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 12. Juni 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe

https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

25. *Uniforme Verteilung auf der Einheitskugel.* Es sei $d \in \mathbb{N}$, und X sei uniform verteilt auf $B := B_d := \{a \in \mathbb{R}^d : |a| \le 1\}$, mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_d^2$.
a) Berechnen Sie (i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte (iii) den Erwartungswert von $R := |X|$. (Hinweis: Sie kommen hier ohne die Formel für das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel aus.)
b) Bestimmen Sie die Zahl $c_d \in [0,1]$ so, dass $\mathbf{P}(c \le R \le 1) = 0.999$.
Was ergibt sich für (i) $d = 3$ (ii) $d = 100$ (iii) $d = 10000$?

26. *Zufällige Intervalle.* a) Y sei eine $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable. Finden Sie jeweils eine auf 2 Nachkommastellen gerundete Zahl c so, dass Y mit Wahrscheinlichkeit
(i) 0.1 (ii) 0.01 (iii) 0.001 (iv) 0.0001
außerhalb der (um seinen Erwartungswert gelegten) $c\sigma$-Grenzen fällt.
(Zur Erinnerung: In R bekommt man die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung als $\Phi(b) = \texttt{pnorm}(b)$ und die zugehörige *Quantilfunktion* als $\Phi^{-1}(p) = \texttt{qnorm}(p)$.)
b) Y sei eine reellwertige Zufallsvariable mit Erwartungswert μ, und d sei eine positive Zahl. Sind die beiden Ereignisse “Y hat von seinem Erwartungswert einen Abstand $\le d$” und “Das zufällige Intervall $I := [Y - d, Y + d]$ überdeckt die Zahl μ” gleich?
c) Y sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz 25 und unbekanntem Erwartungswert μ. Geben Sie ein zufälliges Intervall I and, welches μ mit Wahrscheinlichhkeit
(i) 0.9 (ii) 0.99 (iii) 0.999 (iv) 0.9999 überdeckt.

27 S. *Risikokontrolle.* a) Es sei B eine $\mathrm{Bin}(n, 0.9)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist das maximale n, für welches die Wahrscheinlichkeit, dass B α) den Wert 50 β) den Wert 52 überschreitet, noch unter 0.025 bleibt? Beantworten Sie die Frage
i) unter Verwendung der R-Befehle `pbinom` und/oder `qbinom`
ii) durch Auffinden des maximalen n, für welches (für $k = 50$ bzw. $k = 52$) gilt:
$$n \cdot 0.9 + 1.96\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1} < k + \tfrac{1}{2} .$$
iii) Wie kommt das Rezept in ii) mittels der Normalapproximation der Binomialverteilung zustande? Eine Skizze ist hilfreich.
b) Es sei bekannt, dass jede einzelne bis zum Tag x angenommene Buchung eines Fluges mit Wahrscheinlichkeit 0.1 nach dem Tag x storniert wird. Wieviele Buchungen dürfen für diesen Flug bis zum Tag x höchstens angenommen werden, wenn bei 50 Plätzen im Flugzeug alle gebuchten Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.975 Platz finden sollen?

28. S. *Es lebe die Rotationssymmetrie!* X und Y seien zwei unabhängige $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable, und V sei der zufällige Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten X und Y.
a) Bestimmen Sie für $r > 0$ (bis auf einen Fehler $o(\Delta r)$) die Wahrscheinlichkeit, dass V in den Kreisring $\{a \in \mathbb{R}^2 : r \le |a| \le r + \Delta r\}$ mit kleiner “Breite” Δr fällt.[1]
b) Berechnen Sie (i) die Dichte (ii) die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $|V|$.
c) Beweisen Sie mithilfe der Überlegungen aus a) und b), dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2/2} dr = \sqrt{2\pi}$ gilt.
d) Berechnen Sie (i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte der Zufallsvariablen $|V|^2$.
e) Geben Sie eine kurze “formellose” Antwort auf die Frage, wie das Quadrat des Abstands vom Ursprung eines auf $\mathbb{R}^2$ standard-normalverteilten Punktes verteilt ist.

[1] In der ursprünglichen Version des Blattes hieß es “dass $|V|$ in den Kreisring…”. Das war ein Tippfehler!