PROF. A. WAKOLBINGER | Blatt 6 | SoSe 2020

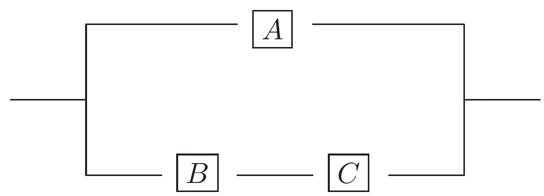
Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 5. Juni 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe

https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

21. *Unabhängige exponentialverteile Zufallsvariable - seriell und parallel.*

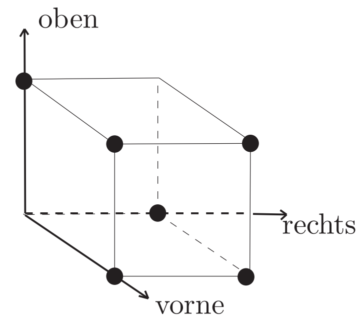
a) Die Lebensdauern der Geräte A, B, C seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parametern α, β, γ. Das aus A, B und C zusammengesetzte System (siehe Bild) ist so lange funktionstüchtig, bis sowohl das Gerät A als auch mindestens eines der Geräte B oder C ausgefallen sind.



Berechnen Sie in Abhängigkeit von α, β, γ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System vor der Zeit t ausfällt.

b) $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert von $\mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < \ln n + a)$ für $n \to \infty$.

22. *Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen.*
$X = (X_1, X_2, X_3)$ mit Wertebereich $\{o, u\} \times \{\ell, r\} \times \{h, v\}$ beschreibe eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind "vorne", drei sind "rechts" und drei sind "oben". Wir betrachten die Ereignisse
$E_1 := \{X_1 = o\} = \{X \text{ landet oben}\}$, $E_2 := \{X_2 = r\} = \{X \text{ landet rechts}\}$, $E_3 := \{X_3 = v\} = \{X \text{ landet vorne}\}$.



a) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix der Verteilungsgewichte von (X_1, X_2). Sind E_1 und E_2 unabhängig? Sind sie positiv korelliert?

b) Gilt $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \cdot \mathbf{P}(E_3)$?

23. S. *Unabhängig? Unkorrliert?* a) (X_1, X_2) ist das Koordinatenpaar eines auf $S \subset \mathbb{R}^2$ uniform verteilten Punktes. Sind X_1 und X_2

	(i) unkorreliert	(ii) unabhängig
für	α) $S := [-1, 1] \times [0, 1]$,	β) $S := ([-1, 0] \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times [0, 1])$,
	γ) $S := \{(a_1, a_2) : a_1^2 + a_2^2 \leq 1, a_1 \geq 0\}$?	

b) X_i sei Exp(i)-verteilt für $i = 1, 2, 3$; X_1, X_2, X_3 seien unabhängig. Berechnen Sie die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen $X_1 + X_2$ und $X_2 + X_3$.

24. S. *Die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes.* a) Berechnen Sie in der Situation der Übungsaufgabe A14 (für die dort angegebenen Zahlenwerte) die Standardabweichung der Zufallsvariablen M_n, für $n \leq g$. Hinweis: Eine Vorgangsweise ganz analog zu der in V6a6 führt zum Ziel.

b) Finden Sie für $g = 100$ und $n = 40$ mit der Chebyshev-Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass M_n um mehr als $\frac{2}{\sqrt{33}}$ (≈ 0.35) Tonnen von dem in A14a) berechneten Populationsmittelwert μ abweicht. Zusatz am 04.06.: Eigentlich hätte hier $\frac{2}{\sqrt{55}}$ stehen sollen statt $\frac{2}{\sqrt{33}}$. Wenn Sie das vor dem Abgabetermin noch sehen, dürfen Sie die Aufgabe auch damit rechnen - ein Aha-Erlebnis ist garantiert! Siehe auch die Diskussion zu dieser Aufgabe im OLAT-Forum.