Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 29. Mai 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

17. *Hochfrequente Versuche, kleine Erfolgswahrscheinlichkeit.* Sie machen jede Millisekunde einen Versuch, jeweils nach Art des p-Münzwurfs mit $p = 0.002$. Berechnen Sie mit der Poissonnäherung die Wahrscheinlichkeit, dass der 5-te Erfolg länger als 3 Sekunden auf sich warten lässt.

18. S. *Chaos - oder was?* 10000 Punkte werden einer nach dem anderen (nach dem Prinzip “neues Spiel, neues Glück”) rein zufällig (d.h. uniform) im Quadrat $S(\subset \mathbb{R}^2)$ mit den Eckpunkten $(0,0),(100,0),(100,100),(0,100)$ verteilt. Für $A \subset S$ sei $N(A)$ die Anzahl der Punkte, die in A landen. Es sei A_1 das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ und A_2 das Quadrat mit den Eckpunkten $(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)$.
a) Berechnen Sie die Poissonapproximation für

(i) $\mathbf{P}(N(A_1) = 3)$ (ii) $\mathbf{P}(N(A_2) = 3)$ (iii) $\mathbf{P}(N(A_1) + N(A_2) = 6)$.

b) Angenommen, die 10000 Punkte werden im Abstand von jeweils einer Millisekunde ins Quadrat S “geworfen”. Es sei $t \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Exponentialapproximation für die Wahrscheinlichkeit, dass das Quadrat A_1 in den ersten t Sekunden von keinem Punkt getroffen wurde.

19. *Von Bernoulli zu Cantor: Uniformes durch Transport des Münzwurfmaßes.* Wieder sitzen Sie auf Ihrer einsamen Insel, ausgerüstet mit einer fairen Münze, und können die faire Münzwurffolge $Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$ generieren.

a) Wie ist die Zufallsvariable $X := \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{4}Z_2 + \frac{1}{8}Z_3 + \cdots$ verteilt?
Hinweis: Es reicht, wenn Sie für Intervalle $J = [0, d)$ mit dyadischer Intervallobergrenze $0 \le d \le 1$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X \in J)$ bestimmen. Was ergibt sich für $\mathbf{P}(X < \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(X < \frac{1}{4})$, $\mathbf{P}(X < \frac{3}{4})$? Wieso ist $\mathbf{P}(Z_2 = Z_3 = \cdots = 1) = 0$?

b) Es sei $Y := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} Z_n$. Beschreiben Sie eine Teilmenge C von $[0,1]$, für die gilt: $\mathbf{P}(X \in C) = 0$ und $\mathbf{P}(Y \in C) = 1$.
Hinweis: Was ergibt sich für $\mathbf{P}(Y < \frac{1}{3})$, $\mathbf{P}(Y < \frac{2}{3})$, ...?

20. S. *Transformationen.* U sei uniform auf $[0,1]$ verteilt. Berechnen Sie
a) den Erwartungswert b) die Verteilungsfunktion c) die Dichte
von
(i) $(U+1)^{1/5}$ (ii) $-\ln(U^{1/2})$ (iii) $(-\ln U)^{1/2}$
Für die Lösung von a) (iii) ist hilfeich, dass $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Dazu nur als Hintergrundinformation eine Beziehung zur Gamma-Funktion:
$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{3/2-1} e^{-x} dx = \Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.