Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 22. Mai 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

13. *Erwartete Anzahl von Runs.* Eine Folge X der Länge 500 mit Einträgen X_i aus dem Alphabet A, C, G, T komme durch ein (p_A, p_C, p_G, p_T)-Würfeln zustande, wobei $p_A = p_G = 1/4$, $p_C = 1/3$, $p_T = 1/6$ gelte.
a) Berechnen Sie $\mathbf{P}(X_1 = X_2)$.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Runs von X. (Dabei ist ein *Run* ein Block der Form $(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j)$ mit $X_i = X_{i+1} = \cdots = X_j$, welcher nicht zu einem längeren Block dieser Form erweitert werden kann. Man beachte: Auch 1 ist als Länge eines Runs möglich.)

14.S. *Erwartungswert des Stichprobenmittels – in einer Bilderbuchsituation.* In einer Herde S von afrikanischen Elefanten mit insgesamt g Tieren haben 10% der Tiere das Gewicht 5 t, 20% das Gewicht 4 t, 40% das Gewicht 3 t, 20% das Gewicht 2 t und 10% das Gewicht 1 t. Berechnen Sie
a) den Erwartungswert des Gewichtes eines rein zufällig aus S gewählten Elefanten
b) den Erwartungswert des artihmetischen Mittelwertes aus den Gewichten von 20 aus der Herde rein zufällig herausgegriffenen Elefanten.
Formalisieren Sie Teil b) wie folgt: Für $a \in S$ sei $h(a)$ das Körpergewicht des Elefanten a. Für $n \leq g$ sei T_n eine rein zufällige Teilmenge von S mit n Elementen, und $M_n := \frac{1}{n} \sum_{a \in T_n} h(a)$. Was ergibt sich für $\mathbf{E}[M_n]$?

15.S *Kann das der reine Zufall sein?* An 80 Studierende, von denen genau 30 aus Frankfurt kommen, werden in bijektiver Manier 80 Karten ausgegeben, von denen 40 fürs Theater und 40 fürs Kino sind.
a) Angenommen die Zuordnung erfolgt rein zufällig. Wie ist die Anzahl der auf die Frankfurter Studierenden entfallenden Kinokarten verteilt? Was ist der Erwartungswert dieser Anzahl?
b) Es ergab sich, dass die Frankfurter Studierenden gerade mal 10 Kinokarten abbekamen. Wie wahrscheinlich ist unter der Annahme einer rein zufälligen Zuordnung ein Ergebnis, das mindestens so weit vom Erwartungswert entfernt ist wie das eingetretene?
Hinweis: Hier ist der R-Befehl sum(dhyper(...)) hilfreich. Finden Sie mittels des Befehls `?dhyper` *heraus, was das mit der Aufgabenstellung zu tun hat, und finden Sie die passenden Summationsgrenzen.*

16. *Alles besetzt?* Wir versetzen uns in die in V1b betrachtete Situation der wiederholten rein zufälligen Platzwahl (mit erlaubter Mehrfachbesetzung), mit g Plätzen und n Objekten. Wie wahrscheinlich ist es dass mit $n = 10$ und $g = 5$ alle Plätze besetzt werden? Betrachten Sie dazu für $j = 1, \ldots, 5$ das Ereignis $E_j := \{\text{der Platz } j \text{ bleibt unbesetzt}\}$.