Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 15. Mai 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe

https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

9. *Zauberei mit fairer Münze?*
a) Sie sitzen auf einer einsamen Insel, haben demgemäß viel Zeit und wollen den Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/3 simulieren. Sie haben aber nur eine „faire Münze“ zur Hand. Wie könnten Sie vorgehen?
b) Ein andermal haben Sie nur eine Münze mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit p zur Hand und wollen den fairen Münzwurf simulieren. Was tun?

10.S. *Qualitätskontrolle.* Ein Produzent und ein Verbraucher einigen sich darauf, daß eine Lieferung mit weniger als 2% defekten Stücken als gut und eine mit mehr als 15% defekten Stücken als schlecht anzusehen ist. Weiter einigen sie sich darauf, aus der Lieferung zufällig n Stück herauszugreifen und den Handel dann abzuwickeln, wenn darunter nicht mehr als c defekte sind.
Der Produzent möchte mit höchstens 5% Wahrscheinlichkeit auf einer guten Lieferung sitzen bleiben, der Verbraucher möchte mit höchstens 5% Wahrscheinlichkeit eine schlechte Lieferung kaufen. Schlagen Sie den beiden unter diesen Randbedingungen einen möglichst wirtschaftlichen Prüfplan vor (d.h. einen mit möglichst geringer „Inspektionszahl“.) Die Stückzahl, aus der die Lieferung besteht, sei so groß, dass es nicht ins Gewicht fällt, ob Ziehen mit oder ohne Zurücklegen angenommen wird.

(Folgender Lösungsweg führt zum Ziel: Man bestimmt für $c = 0, 1, 2, \ldots$ jeweils das kleinstmögliche n, welches dem Wunsch des Verbrauchers entspricht, und prüft, ob es auch den Produzenten zufriedenstellt.)

11.S *Ausgeglichen versus extrem.* Wir betrachten ein $6n$-maliges gewöhnliches Würfeln. Sei E_n das Ereignis, dass alle 6 Augenzahlen gleich oft geworfen werden.
a) Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit von E_n mihillfe der Stirling-Formel.
b) Um welchen Faktor wahrscheinlicher ist für $n = 100$ (mit der Approximation aus a)) das Ereignis E_n gegenüber dem Ereignis, dass jedesmal die 6 geworfen wird?

12. *Zwei Besetzungszahlen in einen Topf geworfen.* $X = (X_1, X_2, X_3)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n; p_1, p_2, p_3$. Wie ist die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ verteilt? Argumentieren Sie
(i) intuitiv (über die Summe von Zählvariablen in einem Würfelexperiment), und
(ii) analytisch, indem Sie für $k \le n$ die folgende Gleichheit nachweisen:

$$\sum_{k_1+k_2=k} \binom{n}{k_1, k_2, n-k} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k} = \binom{n}{k} (p_1 + p_2)^k p_3^{n-k}.$$