Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 8. Mai 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

5. *(Kollisionswahrscheinlichkeit)* a) 4 Studierende wählen rein zufällig (und ohne irgendeine gegenseitige Absprache) je eine von 8 möglichen Gruppen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie alle in verschiedenen Gruppen landen? Finden Sie heraus, was
(i) die exakte Berechnung
(ii) die in der Vorlesung diskutierte Näherung mittels Approximation von $1-t$ durch e^{-t}
(iii) die Stirling-Approximation
als Antwort liefern.
b) Sehen Sie sich das Ergebnis (nicht nur für $n = 4$, sondern für alle $n < 8$) über das Ferebee'sche R-Programm
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Approximationen.R
an. Ändern Sie dazu in diesem Programm die Einstellungen zu `g=8` und `nn=1:7`. Durch Drücken von “Enter” kommt man jeweils zum nächsten Schritt. Die R Konsole muss hierbei aktiviert sein (darauf klicken!).
Wenn R für Sie ganz neu ist: hir finden Sie eine kurze Anleitung:
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/StofI1920/Wandtner/index.html

6.S *(Größenverzerrung)* Es sei $1 \le \ell \le n \in \mathbb{N}$.
a) Wieviele Permutationen von $1, \dots, n$ gibt es, für die der das Element 1 enthaltende Zyklus die Länge ℓ hat *und* das Element 2 enthält?
b) Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$. Denjenigen Zyklus von X, der das Element 1 enthält, bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}_1$, und $L_1 := \#\mathfrak{Z}_1$ sei dessen Länge. Berechnen Sie
(i) $\mathbf{P}(L_1 = \ell, 2 \in \mathfrak{Z}_1)$, (ii) $\mathbf{P}(2 \in \mathfrak{Z}_1)$.

7. *(Rein zufällige Abbildungen)* a) Für $N \in \mathbb{N}$ sei F eine rein zufällige Abbildung von $[N] := \{1, \dots, N\}$ nach $[N]$ und G eine rein zufällige *bijektive* Abbildung von $[N]$ nach $[N]$.[1] Es seien i und j zwei verschiedene Elemente von $[N]$. Welche der folgenden 4 Aussagen treffen zu? (Beweis oder Gegenbeispiel!)
(i) $F(i)$ ist uniform verteilt auf $[N]$ (ii) $G(i)$ ist uniform verteilt auf $[N]$
(iii) $\mathbf{P}(F(i) = a_1, F(j) = a_2) = \mathbf{P}(F(i) = a_1)\mathbf{P}(F(j) = a_2)$
(iv) $\mathbf{P}(G(i) = a_1, G(j) = a_2) = \mathbf{P}(G(i) = a_1)\mathbf{P}(G(j) = a_2)$
b) Sie schlagen nacheinander die erste und die zweite Karte eines perfekt gemischten Kartenstapels auf (32 Karten, 8 davon haben die Farbe Herz). Wie wahrscheinlich ist es, dass die zweite aufgeschlagene Karte die Farbe Herz hat?

8.S *(Uniform verteilte Besetzungen)* a) (X_1, X_2, X_3) sei eine uniform verteilte Besetzung[2] von 3 Plätzen mit 10 Objekten. Wie wahrscheinlich ist es, dass jeder Platz mit mindestens zwei Objekten besetzt wird? Skizzieren Sie die Menge der zugehörigen Ausgänge als Teilmenge des in der Vorlesung 2a betrachteten de Finetti-Dreiecks.
b) Sei $2g \le n$. Begründen Sie: Die Anzahl der Besetzungen von g Plätzen mit n Objekten, die auf jeden Platz mindestens zwei Objekte setzen, ist gleich der Anzahl der Besetzungen von g Plätzen mit $n - 2g$ Elementen.
c) T sei eine rein zufällige 2-elementige Teilmenge der Menge $\{1, \dots, 12\}$. Wir setzen
$V := T \cup \{0, 13\}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass je zwei verschiedene Elemente von V mindestens den Abstand 3 haben?

---

[1] F entspricht somit dem, was wir in der Vorlesung salopp eine *wiederholte zufällige Wahl* genannt hatten, und G ist eine rein zufällige Permutation.

[2] Zur Erinnerung: Bei einer *Besetzung* (als Synonym für ein g-Tupel von Besetzungszahlen) unterscheiden wir nicht, mit welchen Objekten der jeweilige Platz besetzt ist.